

MATHEMATIK

MATHEMATIK IST ÜBERALL

MATHE
P-SEMINAR
2011/13

Hrsg.: Christian Hanel

IST ÜBERALL

Beteiligte Autoren:

Aganian Dustin

Barthelmes Johannes

Buchwald Frank

Füri Benjamin

Gander Elias

Hatwieger Aron

Helbig Andreas

Hetzel Lisa

Klenkert Daniel

Reinhart Michael

Reith Julian

Rettner Marco

Romstock Stephan

Weiß Nils

Herausgeber:

StR Christian Hanel

Alexander-von-Humboldt-Gymnasium Schweinfurt

Geschwister-Scholl-Straße 4

97424 Schweinfurt

Inhaltsverzeichnis:

- I. Kreuz und quer durch die Mathematik
 1. Lotto: 6 aus 49
 2. Panini – Sammeln bis man arm ist?
 3. Unbewiesene Vermutungen in der Mathematik:
Die (binäre) Goldbachsche Vermutung
 4. Nonogramm
 5. Optische Täuschungen
 6. Wo ist der fehlende Euro?
(Missing-Dollar-Riddle)
 7. Platonische Körper
 8. Kugeln im Würfel
 9. Sierpinski-Figuren
 10. „Beweis“ durch Betrug
 $90^\circ = 91^\circ$?
 11. How old is Anne?
 12. Kakuro
Kreuzworträtsel mit Zahlen
 13. Koch-Figuren
 14. Familientreffen
 15. Rechentricks
 16. Innenwinkelsumme im n-Eck
 17. Teilbarkeitsregeln
 18. Magische Zahlenquadrate
- II. Reinhold und Werner auf Reisen
 1. Die Euler'sche Zahl e
 2. Die Kreiszahl π
 3. Das Monte-Carlo-Verfahren
 4. Der Goldene Schnitt
 5. Die Fibonacci-Folge
 6. Multiplizieren mit römischen Zahlen
 7. Das Dualsystem
 8. Primzahlen
 9. Primzahlzwillinge
 10. Irrationalität von Wurzel 2
 11. Papierformat DIN A4
 12. Pythagoräische Zahlentripel
 13. Fermats letzter Satz
 14. Perfekte Zahlen

- 15. Pascalsches Dreieck
- 16. Dreiteilung des Winkels

III. Eine mathematastische Urlaubsreise

- 1. Die Mathematik des Fußballs – die archimedischen Körper
- 2. Wie groß ist die Unendlichkeit? – Wo Mathematik auf Philosophie trifft
- 3. Labyrinth und Irrgärten
- 4. Die Vermessung der Erde
- 5. Der Klötzchenstapel des Quallenbabys
- 6. Das Möbiusband, eine äußerst nützliche Struktur
- 7. Simpson'sches Paradoxon - Statistiken können lügen
- 8. Triell - Was ist die beste Möglichkeit?
- 9. Das Geburtstagsparadoxon
- 10. Die Gauß'sche Summenformel
- 11. Hilberts Hotel
- 12. Das „Banach-Tarski-Paradoxon“
- 13. Lügen und deren Paradoxa
- 14. Der Satz vom Igel
- 15. Der Satz des Pythagoras – oder auch:
 $a^2+b^2=c^2$

I Kreuz und quer durch die Mathematik

*"Richard, Richard, wir sind reich! Glaub's mir, wir haben's geschafft!"
Moment mal, Lukas dreht schon wieder über. Was ist denn da los, ein Stress, so früh am Morgen. "Was denn? Lukas, hast du Donuts vom Bäcker mitgebracht?" - "Nein, Nussecken, aber das ist doch egal. Wir sind reich, ich hab im Lotto gewonnen!" - "Wie, du hast im Lotto gewonnen?" - "Doch, ganz im Ernst!" - "Also irgendwie glaub ich dir das nicht ganz. Weißt du, wie unwahrscheinlich das Ganze ist?"*

Lotto: 6 aus 49

Jeder kennt das allzu berühmte Spiel, das schon viele Leute in den Ruin getrieben. Andere hingegen glücklicher und reicher wie nie zuvor gemacht hat, Lotto. Ziel des Spiels ist es die 6 der ersten 49 Zahlen zu erraten, die in einer anschließenden Ziehung zufällig ermittelt werden. Die Ziehung der Lottozahlen erfolgt zweimal pro Woche, doch wie groß ist eigentlich die Chance dabei genau die sechs richtigen Zahlen vorher zu erraten?

Die maximale Anzahl aller möglichen Reihenfolgen und Kombinationen von sechs Zahlen aus 49 beträgt $\frac{49!}{(49-6)!} = \frac{49!}{43!}$, also $\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38}$. Da die Reihenfolge der getippten Zahlen allerdings egal ist, gibt es 6! (6 Fakultät), also $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ Möglichkeiten die richtigen 6 Zahlen getippt zu haben, weshalb jede $\frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = 13983816$ Kombination richtig ist,

4	9	2
3	5	7
8	1	6

oder anders herum gesehen die Chance zu gewinnen $\frac{1}{13983816}$ ist.

Die allgemeine Regel, um ohne die Reihenfolge der Zahlen zu beachten eine bestimmte Teilmenge k aus einer n -elementigen Menge setzt sich nun folgendermaßen zusammen: $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Oftmals besteht allerdings der Irrtum, dass beispielsweise die Chance eine Zahl aus 49 geringer sei, als die Chance sechs Zahlen aus 49 richtig zu erraten, was allerdings nicht richtig ist, da sich nämlich mit zunehmender Anzahl an zu richtig erratenden Zahlen auch die Anzahl der verschiedenen Zahlenkombinationen und im Falle einer Bedeutung der Zahlenreihenfolge, sich diese natürlich auch erhöhen.

Hier das Beispiel mit 1 Zahl aus 49:

$$\frac{49!}{1! \cdot (49-1)!} = \frac{49!}{1! \cdot 48!} = \frac{49}{1} = 49.$$

Wie man erkennen kann ist bei diesem Beispiel jede 49. Zahl richtig, beziehungsweise beträgt die Gewinnchance $\frac{1}{49}$.

"Und du bist dir wirklich, wirklich sicher, dass du alle 6 richtig hast?" - "Ja, ich hab sogar nochmal im Internet nachgeschaut! Aber was soll ich denn jetzt mit dem vielen Geld?" - "Machen wir eine Weltreise!" - "Könnten wir wirklich machen, ich möchte auf jeden Fall nach London, ins Stadion von Chelsea, ins Camp Nou in Barcelona und ins Stadion von Real Madrid." - "Ich finde das sehr amüsant, mein lieber Lukas, dass du immer nur an Fußball denkst, aber überleg doch mal: es gibt so viele Länder und Städte auf der Welt, die wir besuchen könnten: Paris, das alte Griechenland, Indien, Ägypten, da haben überall mal berühmte Mathematiker gearbeitet." - "Brasilien, Argentinien, die USA oder Australien. Ich wollte schon immer mal Surfen ausprobieren."

Lukas war schon immer eher der Sporttyp gewesen. Schon im Kindergarten hatte er angefangen, im Fußballverein mitzutrainieren und später hatte er außerdem neben der Schule noch Leichtathletik angefangen. Vormittags büffeln, nachmittags Bolzplatz. So sah sein Tag aus und samstags natürlich Sportschau. Klar, dass er auch da auch die kleinen Klebebilder von seinen Lieblingsfußballstars geliebt hat.

Panini – Sammeln bis man arm ist?

Mit dieser Frage haben sich einige Informatiker von der Universität Würzburg etwas genauer auseinandergesetzt, als Sie es bestimmt getan haben. Jeder kennt sie, die kleinen Fußballsticker, die man vor jeder Weltmeisterschaft oder Europameisterschaft in den kleinen Tütchen kaufen kann. Vor allem Fußball begeisterte Jungs kaufen und tauschen, was das Zeug hält. Im Schnitt geben sie dafür zwischen 300€ und 700€ aus.

Die Würzburger haben ausgerechnet, dass man 1111 Tütchen kaufen müsste, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 Prozent alle 660 Bilder eines Albums zusammenbekommt. Hierbei würde man 666,60 Euro auf den Tisch legen müssen.

Natürlich will niemand so viel Geld dafür ausgeben. Deswegen entwickelten sie eine Formel, die sie die „Panini-Weltformel“ nennen.

Durch diese ist es möglich, auszurechnen, wie teuer so ein Album bei verschiedenen Sammelstrategien werden kann. Natürlich ist es die ungünstigste, solange Bilder zu kaufen, bis man alle hat. Dadurch könnte man im billigsten Fall mit 60€ davon kommen, aber die Wahrscheinlichkeit dafür geht gegen Null.

Vor allem das letzte Bild, das noch fehlt, zu bekommen stellt sich als schwer heraus. Wenn man nur kauft, kommt man im Schnitt auf Kosten bis zu 60-70€ nur für diesen einen Aufkleber. Deswegen besteht bei Panini die Möglichkeit, bis zu 50 Bilder nachzubestellen – was aber ziemlich langweilig ist.

Noch langweiliger: Man bestellt auf Internetportalen gleich die ganze Kiste.

Dann gibt es noch die sogenannte Schmarotzer-Methode. Dafür wartet man so lange, bis andere ihr Album schon voll haben und staubt die übrigen Bilder ab.

Am Besten ist für die Informatiker immer noch die Tauschmethode. Man hat dabei die Chance, viel leichter das zu bekommen, was man braucht, und kommt so viel billiger weg, ohne zu schummeln.

Außerdem pflegt man seine Freundschaften und Kontakte und das ist immer ein Vorteil.

Mit dieser Formel sucht man die Wahrscheinlichkeit (P_{welt}), dass man eine bestimmte Anzahl von verschiedenen Bildern hat (j), nachdem man i -viele Päckchen gekauft hat (in jedem sind jeweils k -viele Bilder). Man bräuchte noch genau N Bilder um sein Album zu vervollständigen. Mit einem neuen Päckchen, das man kauft, bekommt man m verschiedene Karten, wenn man vorher $j - m$ verschiedene hatte:

$$P_{\text{welt}}(j, i) = \sum_{m=0}^k \frac{\binom{j-m}{k-m} \cdot \binom{N-j+m}{m}}{\binom{N}{k}} \cdot P_{\text{welt}}(j-m, i-1).$$

Wegen seines Hobbys hat Lukas jedenfalls beschlossen, Sportwissenschaften zu studieren. Und wird dafür manchmal von Richard ein bisschen, sagen wir, aufgezogen. Natürlich meint der das Ganze gar nicht so böse, wie es sich manchmal vielleicht anhört, aber für ihn ist Sport einfach keine ernstzunehmende Wissenschaft und somit auch kein ernstzunehmendes Studienfach. Chemie oder Physik, kann er neben der Medizin und seiner heißgeliebten Mathematik noch anerkennen, aber Sprachen und Geisteswissenschaften sind für ihn nur nebensächlich. Manchmal verbringt er den ganzen Tag in seinem kleinen Zimmer und denkt über die Lösung eines mathematischen Problems nach, solange bis er die Lösung weiß oder vor Hunger und Müdigkeit aufgeben muss. Lukas findet das ziemlich witzig, deswegen hat er auch einmal zu Richard gesagt, dass er sich wie ein verrückter Nerd in seinem Zimmer verkriecht, und deshalb irgendwann verlernen wird, wie man mit anderen Menschen redet und im Endeffekt doch nichts Neues herausfindet. Das konnte Richard natürlich nicht auf sich sitzen lassen und fing an, für seinen Durchbruch zuforschen.

Unbewiesene Vermutungen in der Mathematik: Die (binäre) Goldbachsche Vermutung

Die (binäre) Vermutung des Mathematikers Christian Goldbach lautet:
„Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.“

Als unbewiesene Vermutung in der Mathematik gelten Vermutungen, die man (bisher) nicht beweisen oder widerlegen konnte.

Viele bedeutende Zahlentheoretiker versuchten die Goldbachsche Vermutung zu beweisen oder zu widerlegen – ohne Erfolg. Trotz eines angesetzten Preisgeldes von 1 Million Euro für den Beweis durch den britischen Verlag Faber & Faber im Jahr 2000 wurde dieser bisher noch nicht erbracht. Es kursieren im Netz eine Menge von angeblichen Beweisen der Vermutung, jedoch ist keine dieser „Beweise“ aufgrund von Fehlern in der Argumentation wissenschaftlich anerkannt worden.

Bisher wurde nur die Gültigkeit der Vermutung für Zahlen bis $26 \cdot 10^{17}$ bewiesen.

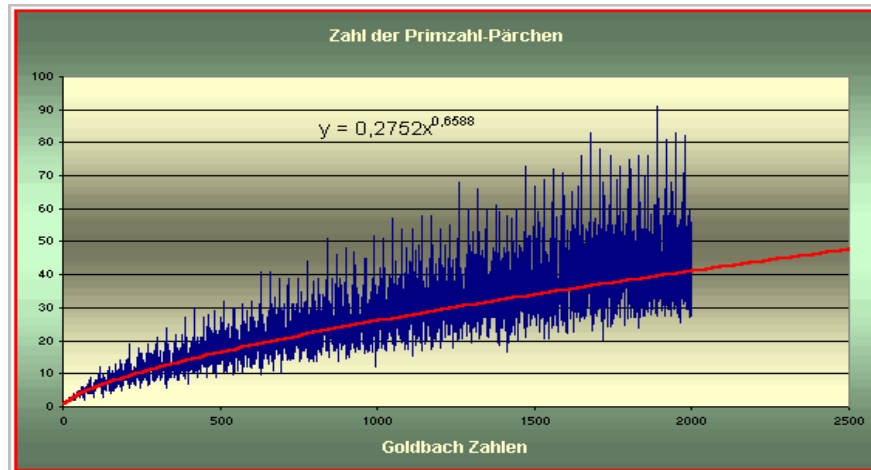
Einige Beispiele:

(1) $26 = 13 + 13$; (2) $8 = 5 + 3$; (3) $18 = 7 + 11$ oder $18 = 5 + 13$;

Die Darstellung einer beliebigen, geraden Zahl größer als 2 als Summe zweier Primzahlen bezeichnet man als Goldbach-Zerlegung. Die Goldbach-Zerlegung ist nicht zwingend eine eindeutige Zerlegung, wie man am Beispiel (3) erkennen kann. Je größer die zu zerlegende Zahl ist, desto mehr Möglichkeiten gibt es tendenziell für die Goldbach-Zerlegung.

Eine Annäherung an den Beweis dieser Vermutung stellte man auf, als bewiesen wurde, dass jede gerade natürliche Zahl größer als 2 als Summe von höchstens 6 verschiedenen Primzahlen dargestellt werden kann.

Folgende Grafik zeigt den blauen Graphen der „Goldbach-Funktion“, bei dem nach rechts gerade Zahlen bis 2000 aufgetragen sind und nach oben die Anzahl der möglichen Goldbach-Zerlegungen. Daraus lässt sich eine mittlere Funktion $y = 0,2752 \cdot 0,6588$ berechnen, die in der Grafik rot eingezeichnet ist.



Diese zwei so unterschiedlichen Menschen leben jetzt schon seit 3 Semestern zusammen in ihrer WG. Und jetzt wollen sie zusammen eine Weltreise unternehmen. Nach endlosen Diskussionen haben sie sich dann doch einigen können; Jetzt ist für jeden etwas dabei, Sport, Urlaub, Kultur und Naturwissenschaft. Aber das eigentliche Problem kommt erst noch: Richard ist noch nie geflogen. Und er hat furchtbare Flugangst: "Was ist, wenn das Flugzeug abstürzt, weißt du, wie hoch wir dann sind? Über 10 Kilometer über der Erde. Wenn wir dann in freiem Fall auf die Erde zurasen, wir könnten ... , auf uns würde eine Kraft ... , wir könnten niemals..." Die beiden sitzen zwar erst im Zug zum Flughafen, aber Lukas ist vorbereitet. Zum Glück. "Schau mal, ich hab zuhause noch an dich gedacht, und hab dir ein Matherätsel mitgebracht, vielleicht lenkt dich das ein bisschen ab."

Nonogramm

Minus						und		Plus					
	1	1	1	1	1				1	1	5	1	1
0								1					
0								1					
5								5					
0								1					
0								1					

Das Ziel eines Nonogramms besteht darin, mit Hilfe der am Rand stehenden Zahlen ein Muster oder Bild zu erzeugen. Die Zahl am Rand gibt an, wie viele Kästchen in dieser Zeile bzw. Spalte gefärbt werden sollen um das gewünschte Muster oder Bild zu erhalten. Die Zahl entspricht der Länge der aufeinander folgenden gefärbten Kästchen. Diese werden als Block bezeichnet. Bei mehreren Zahlen für eine Zeile bzw. Spalte gibt es mehrere Blöcke mit der Länge der jeweiligen Zahl. Die Reihenfolge der Zahlen bestimmt die Reihenfolge der Blöcke. Zwischen zwei Blöcken ist immer mindestens ein Kästchen frei, da es sonst ein durchgängiger Block wäre. Kästchen die sicher frei bleiben, können bei der Lösung des Nonogramms zur Vereinfachung mit einem Punkt o.Ä. gekennzeichnet werden.

Falls Sie nun Interesse bekommen haben, selbst solch ein Nonogramm zu lösen, können sie sich an folgenden Aufgaben versuchen.

Für Anfänger:

						1		
						1	1	3
	3	1	5	0	3	1	1	
1	1	3						
1	1	1						
	3	3						
	1	1						
	1	3						

Für Fortgeschrittene:

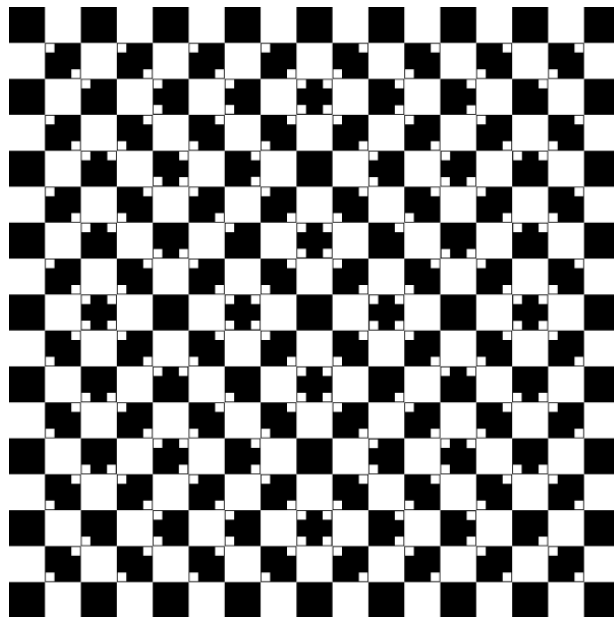
				2	2									2	2	2	2	2
	3	3	3	5	14	13	2	2	2	2	13	14		4	3	3	3	3
16																		
17																		
2	2	2																
1	2	2																
2	2																	
2	2																	
2	2																	
2	2																	
2	2																	
3	2	1																
3	3	2																
4	7																	
4	6																	
3	4																	

Lösung

"Die warn ja einfach, aber trotzdem danke!" - "Dafür hast du aber ganz schön lange gebraucht, mein Lieber! Wir sind schon am Flughafen." Und das sind sie wirklich. Der Zug fährt gerade in den Bahnhof unterhalb des Flugterminals 2 ein. Gleich wird es Ernst werden. Aber im Moment sieht Richard wieder einigermaßen entspannt aus. Jetzt noch schnell der Check-In und durch die Kontrollen ans Gate und ab geht's. Ihr erstes Ziel: Barcelona. Nach dem Start fängt leider aber auch Richards Nervosität wieder an, zu steigen. Er wollte aber auch unbedingt am Fenster sitzen. Jetzt haben sie den Salat. "Lukas, da unten dreht sich alles, ich hab Angst!!" - "Ach, jetzt mach dir mal nicht ins Hemd, da unten ist alles in Ordnung, das ist wie mit den optischen Täuschungen; Das kennst du doch."

Optische Täuschungen

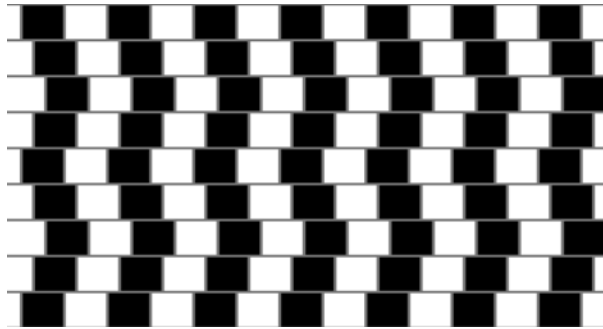
Eine optische Täuschung, auch visuelle Illusion genannt, ist eine Wahrnehmungstäuschung des visuellen Sinnes. Diese Täuschungen können diesen Sinn in vielen verschiedenen Hinsichten betreffen. Beispiele: Farbillusionen, geometrische Illusionen, Bewegungsillusionen usw.



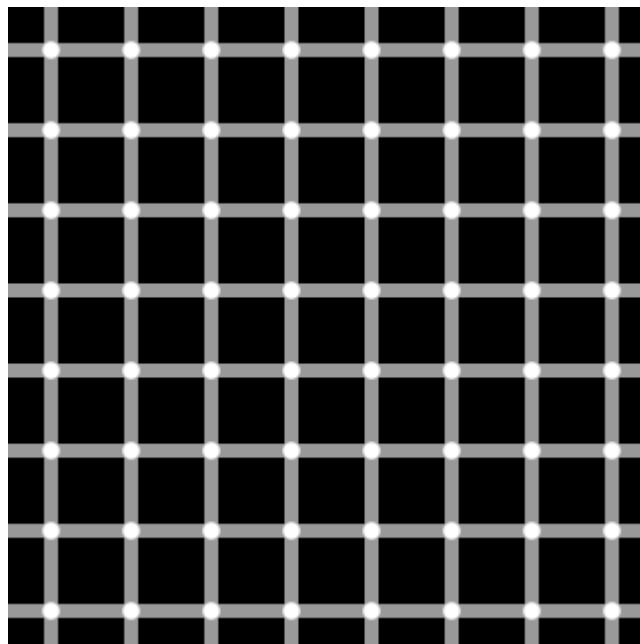
Hier werde ich Ihnen einige Illusionen vorstellen.

Was ist gerade, was ist schief?

Das Quadrat besteht aus schwarzen und weißen Teilquadraten, jedoch befinden sich in einigen dunklen Quadraten kleinere weiße Rechtecke. Dies erweckt den Anschein, dass die eigentlich geraden Linien verschwimmen und nicht mehr gerade sind. Dabei spielt die Helligkeit und die Dicke der Rechtecke eine große Rolle.



Auch in diesem Bild scheint es als wären die Linien schräg, doch hält man ein Lineal an eine der Linien so wird deutlich, dass sie vollkommen gerade sind.



Das sog. Hermann Gitter wurde von Ludimar Hermann im Jahre 1870 entdeckt. Da auch Ewald Hering dieses Phänomen auffiel wird es auch Hering-Gitter genannt. Schaut man auf das Gitter, so scheint es als würden an den Schnittpunkten der Linien schwarze Flecken zu sehen. Doch sobald man sich auf diese konzentriert verschwinden sie. Bisher wurde angenommen, dass dies etwas mit dem Verschaltungsprinzip der Nerven zu tun habe. Doch wenn man die Täuschung nur leicht verändert verschwinden die Punkte. Dies widerspricht der Theorie, dass das Verschaltungsprinzip dafür schuld ist.

"Alles ist ok, alles ist ok, alles ist ok!" - "Mensch Richard, es ist wirklich alles in Ordnung, glaub's mir doch!" Über ihnen erlöschen die Gurtzeichen. Eine Stewardess bringt ihnen etwas zu trinken und Richard kann sich allmählich mit dem Fliegen anfreunden. Er sieht sich ruhig einen Film an und bis auf, dass er sich bei der Landung an Lukas' Arm klammern muss, geht alles gut. In Barcelona angekommen, machen sie sich sofort auf die Suche nach einem Hotel. Die Frau am Schalter der Touristeninformation warnt sie jedoch vor Betrügern, sie hat da eine sehr kuriose Geschichte gehört:

Wo ist der fehlende Euro? (Missing-Dollar-Riddle)

Rätsel:

Drei Freunde wollen zusammen einen Urlaub in einem Hotel in Österreich verbringen. Sie teilen sich dabei ein Zimmer, das 30 € pro Nacht kostet. Wenn jeder der drei den selben Anteil zahlt, sind das 10 € für den Einzelnen. Gegen Abend fällt dem Hoteliér auf, dass er die Preise in einer falschen Liste nachgesehen hat. Das Zimmer kostet eigentlich nur 25 € pro Nacht. Sofort schickt er seinen Pagen los, den Freunden die 5 € zurückzugeben. Dieser findet es jedoch ziemlich ungeschickt, 5 € unter den dreien aufzuteilen, und steckt 2 € in seine eigene Tasche. Dann gibt er jedem der drei 1 € zurück. Die Freunde freuen sich, mit dem einen Euro weniger haben sie somit nur je 9 € für die Nacht bezahlt.

($9 € \cdot 3 = 27 €$) Zählt man dazu noch die 2 €, die der Page eingesteckt hat, kommt man jedoch nur auf 29 €.

Wo ist also der fehlende Euro?

Lösung:

Zuerst erscheint es ziemlich verblüffend, ein Euro fehlt, ist anscheinend einfach verschwunden. Beim genaueren Hinsehen bemerkt man aber, wo der Denkfehler liegt. Zur Veranschaulichung stellt man das Ganze einmal als mathematische Gleichung dar:

$$\begin{array}{c} 27 € \\ \swarrow \quad \searrow \\ 30 € \text{ (Bezahlt)} = 25 € \text{ (Preis)} + 2 € \text{ (Page)} + 3 € \text{ (Rückerstattung)} \end{array}$$

Oder eine Gleichung, die beweist, dass auch später nichts verloren gegangen ist:

$$27 € \text{ (Im Endeffekt bezahlt)} = 25 € \text{ (Hoteliér)} + 2 € \text{ (Page)}$$

Durch das Drum-Herum und die Geschichte wird der Leser verwirrt. Er vermutet, dass dahinter ein schwerwiegendes mathematisches Problem stecken muss, was aber nicht der Fall ist. Er soll bewusst fehlgeleitet werden und die Rätsler sollen denken, dass ein Paradoxon vorliegt, was eigentlich nicht der Fall ist.

Die „Lösung“:

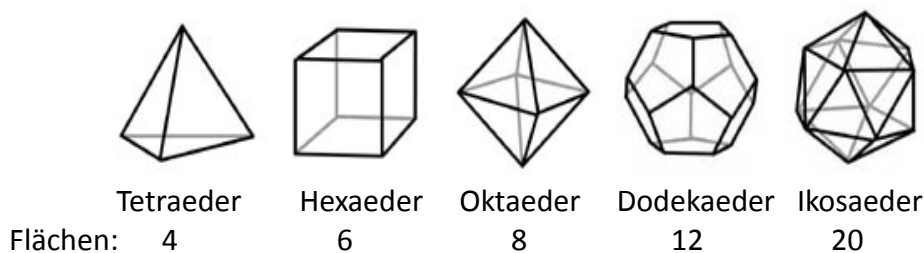
Im nächsten Jahr besuchen zwei von den drei Freunden wiederum das selbe Hotel. Der Doppelzimmerpreis für eine Nacht ist 20 €. Spätabends fällt dem Hoteliér auf, dass er wieder den falschen Preis auf der falschen Liste nachgesehen hat. Eigentlich kostet das Zimmer nur 15 €. Wieder schickt er seinen Pagen los, um den Gästen die übrigen 5 € zu geben. Wieder fällt diesem Pagen auf, dass man das Geld nicht gut durch 2 teilen kann, also steckt er 3 € davon ein und gibt jedem der Freunde 1 €. Die beiden haben somit wieder jeder 9 € bezahlt ($9 \text{ €} \cdot 2 = 18 \text{ €}$). Zählt man dazu die 3 €, die der Page eingesteckt hat, kommt man auf eine Endsumme von 21 €. Ein Euro mehr, als sie ursprünglich bezahlt haben. Hier ist also der fehlende Euro.

Lukas ist froh, als sie endlich ein Hotel gefunden haben und aus der Information verschwinden können. Die Frau hat ihn ordentlich verwirrt und bei ihm einen ganz seltsamen Eindruck hinterlassen. Richard dagegen fand sie faszinierend. Aber Lukas wollte ihm nicht die Zeit geben, länger darüber nachzudenken; Er wollte gleich los, Camp Nou anschauen, das Fußballstadion des FC Barcelona, Lionell Messis Heimstadion. Der Traum jedes Fußballers. Auf dem Weg dorthin konnte sich Richard nicht zurückhalten. "Sag mal, Lukas, weißt du eigentlich, was so ein Fußball ist? Früher bestand er aus lauter Fünf- und Sechsecken. Heutzutage gibt es welche aus lauter gleichen Achtecken, ein platonischer Körper quasi." - "Platonische, was?!"

Platonische Körper

Unter platonischen Körpern versteht man vollkommen regelmäßige Polyeder (dreidimensionales Gebilde mit mehreren ebenen Flächen). Alle Flächen / Kanten / Ecken haben die selben Maße, wodurch sie nicht voneinander unterscheidbar sind.

Insgesamt gibt es fünf platonische Körper:

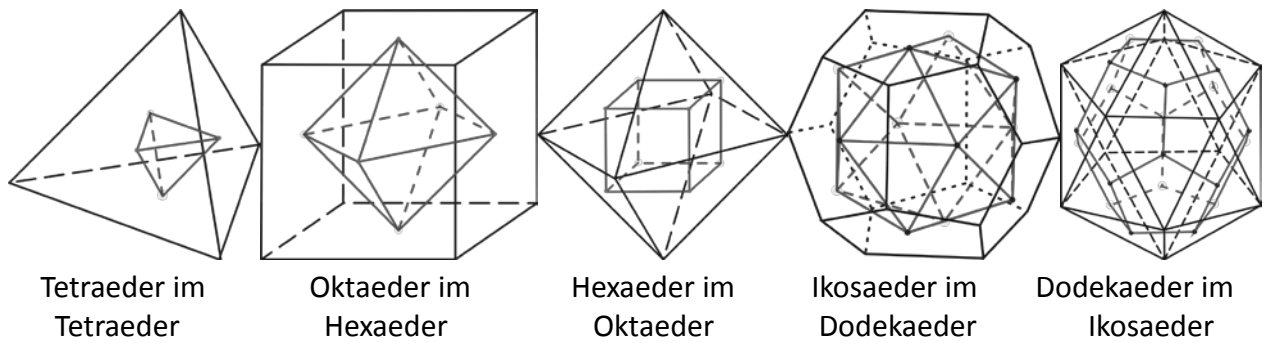


Die Namen geben jeweils die Anzahl der Flächen auf griechisch wieder. Platon, der für die Namensgebung der fünf Körper zuständig ist, ordnete außerdem jedem Körper ein Element zu. So steht das Tetraeder für Feuer, das Hexaeder für Erde und das Oktaeder für Luft, während das Dodekaeder mit Äther assoziiert wird und das Ikosaeder mit dem Wasser.

Bei platonischen Körpern kann auch die Mathematische Dualität betrachtet werden, denn jeder der fünf konvexen Polyeder hat einen „Dualkörper“. Diesen bildet man, indem man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen verbindet.

Es gelten folgende 3 Regeln:

- Jedes Ausgangspolyeder hat genauso viele Flächen wie der Dualkörper Ecken hat.
- Der Ausgangspolyeder hat genauso viele Ecken wie der Dualkörper Flächen hat.
- Beide haben die gleiche Anzahl an Kanten.



Im Alltag kommen platonische Körper z.B. als Spielwürfel vor:



In der Natur dagegen gibt es nur Annäherungen an platonische Körper. Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder kommen als (idealisierte) Kristalle vor. Dazu gibt es auch noch Quasikristalle, die dodekaedrisch bzw. ikosaedrisch sind.

Auch in der Chemie gibt es organische Kohlenwasserstoffmoleküle, die wie platonische Körper gebildet sind, man nennt sie Platonische Kohlenwasserstoffe. Als Beispiele wären Tetrahedran, Cuban oder Dodecahedran zu nennen.

"Schon gut, Richard, aber jetzt lass uns endlich reingehen." Drinnen bewundern die beiden die Tribünen, die VIP Lounge, den Rasen und zum Schluss die Umkleidekabinen. Richard langweilt sich eher, aber Lukas ist voll in seinem Element. Um ihn herum ist alles Fußball, Bilder und Plakate von Spielern, der Geruch nach frisch gemähtem Rasen und nach Emotionen beim Kampf um den Sieg. Er stellt sich vor, wie seine Lieblingsfußballer in diese Umkleidekabine gelaufen kommen, sich gegenseitig umarmen und ihren Sieg im Wirlpool feiern. "Ich frag mich grade, wie transportieren die eigentlich ihre Bälle?" Richard reißt ihn wie immer aus seinen Tagträumen. "Ichnehm an, in Kartons?" - "So eine Platzverschwendung bei so großen Bällen..."

Kugeln im Würfel

Stellen Sie sich einen Würfel mit einer Kantenlänge von 4 cm vor, in den man eine Kugel mit dem Durchmesser 4 cm einbeschreibt, die gerade so in den Würfel passt und ihn an allen sechs Seitenflächen berührt. Dabei entsteht in der Nähe der Seitenflächen des Würfels ein Hohlraum. Dieser Hohlraum ist der Teil des Würfelvolumens, der nicht von der Kugel ausgefüllt wird. Man kann ihn folgendermaßen berechnen:

$$V_{\text{Hohlraum}} = V_{\text{Würfel}} - V_{\text{Kugel}}$$

Man kann stattdessen aber auch 8 kleinere, gleichgroße Kugeln, jeweils des Durchmessers 2 cm, in den Würfel packen. Dabei entsteht ein Hohlraum nicht nur in der Nähe der Seitenflächen des Würfels, sondern auch in der Mitte des Würfels zwischen den Kugeln. Jedoch verringert sich im Gegensatz zum ersten Beispiel mit nur einer Kugel der Hohlraum in der Nähe der Seitenflächen.

Jetzt kann man dies auch mit 27 Kugeln des Durchmessers $\frac{4}{3}$ cm oder mit 64 noch kleineren Kugeln des Durchmessers 1 cm etc. machen.

Frage: Ist der Hohlraum am geringsten a) bei einer Kugel?
oder b) bei möglichst vielen Kugeln?
oder c) bleibt der Hohlraum gleich?

Lösungsansatz

Gegeben: Würfelvolumen = 64 cm^3 (bleibt immer gleich)

a) Bei einer Kugel ($r = 2 \text{ cm}$):

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot (2 \text{ cm})^3 \cdot \pi \approx 33,51... \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Hohlraum}} = 64 \text{ cm}^3 - 33,51... \text{ cm}^3 \approx 30,49... \text{ cm}^3$$

Dies entspricht 47,64...% des Würfelvolumens.

b) Bei 216 Kugeln ($r = \frac{1}{3} \text{ cm}$) wie im Bild:

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\text{cm}\right)^3 \cdot \pi \approx 0,16 \dots \text{cm}^3$$

$$V_{\text{Hohlraum}} = 64 \text{ cm}^3 - 216 \cdot 0,16 \dots \text{cm}^3 \approx 30,49 \dots \text{cm}^3$$

Dies entspricht ebenfalls 47,64...% des Würfelvolumens.

Antwort:

C ist richtig, der Hohlraum bleibt also gleich.

Egal wie viele Kugeln man in den Würfel packt, der Hohlraum ist immer gleich.

Begründung: Die Anzahl der Kugeln multipliziert mit r^3 ergibt immer dieselbe Zahl.

In diesem Fall ergibt das immer 8: $1 \cdot (2)^3 = 8$; $216 \cdot (1/3)^3 = 8$

Grenzwertbeispiel:

Bei 1 Million Kugeln mit einem Radius von 0,02 cm = 0,2 mm würde der Hohlraum auch 47,64...% des Würfelvolumens ausmachen, da $1.000.000 \cdot (0,02)^3 = 8$.

"Ok, sogar ich kann mich mal irren, an der Ballgröße liegt es also nicht. Aber lass uns trotzdem zurück ins Hotel gehen. Morgen geht's ja schon weiter nach Ägypten."

Schon in der Nacht träumen beiden davon. Lukas von Pharaonen, Mumien, Sarkophagen, und von der Sphinx, die ihn in der Wüste verfolgen, ihn jagen und er ist heilfroh, als er am nächsten Morgen aufwacht und wohlbehalten in seinem Hotelbett liegt.

Richard hat ganz andere Dinge geträumt. Von den Pyramiden von Giseh, welche ungeheueren Kräfte nötig gewesen sind, diese zu bauen, was für perfekte Bauwerke das doch sind und was wäre, wenn sie eine gleichseitige Dreiecksgrundfläche hätte. In seinem Kopf nehmen Dreiecke immer neue Figuren an, drehen sich um sich selbst und werden ständig größer und kleiner.

Sierpinski-Figuren

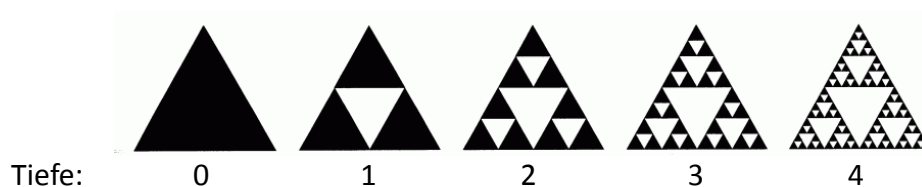
Sierpinski-Dreieck:

Man erhält ein Sierpinski-Dreieck, indem man ein (meist gleichseitiges) Dreieck in vier zueinander kongruente Dreiecke teilt. Dazu müssen nur die Mittelpunkte der Seiten des Ausgangsdreiecks verbunden werden. Nun entfernt man das Mittlere, wodurch noch drei übrig bleiben. Das ganze kann mit den übrig gebliebenen Dreiecken unendlich fortgesetzt werden. So erhält man mehrere Tiefen.

Der Flächeninhalt geht dabei gegen Null während der Umfang gegen unendlich verläuft. Denn:

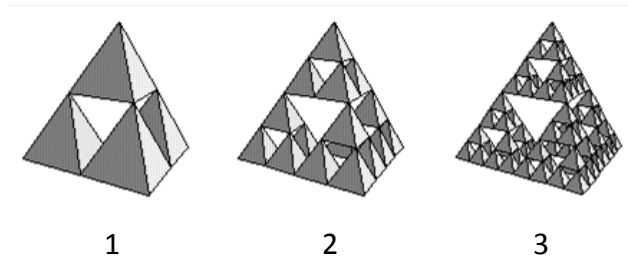
$$A = \frac{3^n}{4} ; A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$
$$U = \frac{3^n}{2} ; U \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

n steht für die Anzahl der Tiefen.



Sierpinski-Pyramide:

Die Sierpinski-Pyramide ist ähnlich wie das Sierpinski-Dreieck, doch im Gegensatz zum Sierpinski-Dreieck ist die Grundfigur eine Pyramide und damit ein 3D-Gebilde. Deswegen wird sie in vier Tetraeder aufgeteilt, die die halbe Kantenlänge der Anfangspyramide besitzen.



Tiefe:

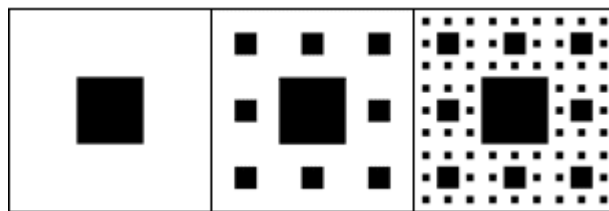
1

2

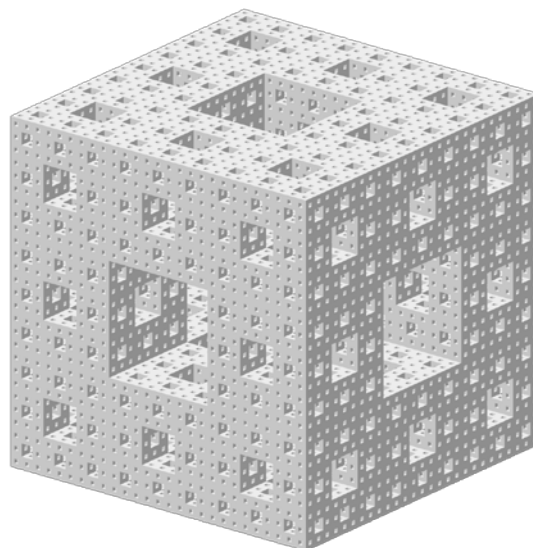
3

Sierpinski-Teppich:

Die Grundlage ist ein Quadrat. Man entfernt ein Neuntel der Fläche, sodass um das Loch acht gleichgroße Quadrate entstehen. Nun entfernt man wieder ein Neuntel der Fläche der Quadrate. So entstehen mehrere Stufen.



Mit dem selben Prinzip in 3 Dimensionen, entsteht ein sog. Menger-Schwamm.



Als sie am nächsten Tag in Ägypten ankommen, besuchen sie zuerst die antike Hauptstadt Alexandria. In der Schule haben die beiden viel über Kleopatra und ihre vielen verschiedenen Affairen mit römischen Machthabern gehört und wollen jetzt ein bisschen Geschichtsluft schnuppern.

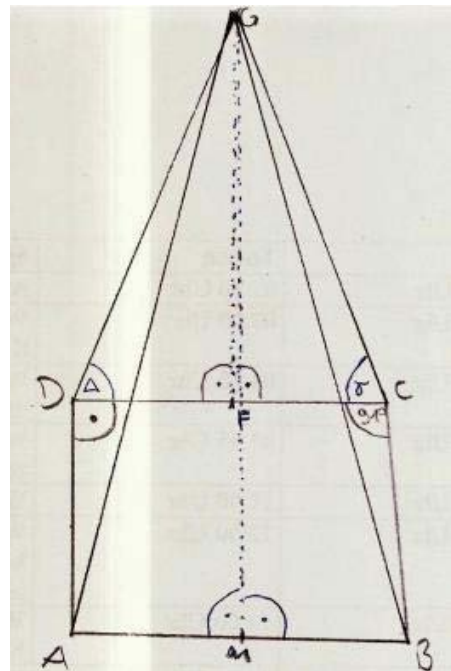
In einem alten Museum stoßen sie auf Hieroglyphen, die die Feldarbeit der alten Ägypter beschreiben. Dadurch, dass das Nildelta jedes Jahr aufs neue von riesigen Überschwemmungen geprägt worden waren, mussten sie nach jeder Regenzeit die Felder neu abmessen. Sie hatten dazu eine Methode entwickelt, mit der sie auf dem Feld ganz einfach einen rechten Winkel bilden konnten. Sie nahmen ein 3, ein 4 und ein 5 Längen langes Seil, knoteten diese zusammen und hatten so ohne es zu wissen einen rechten Winkel nach dem Satz des Pythagoras konstruiert. So konnten sie die Felder gerecht und gleichmäßig einteilen. So ein rechter Winkel ist schon etwas Feines.

„Beweis“ durch Betrug $90^\circ = 91^\circ$?

Durch einen kleinen Trick kann man jemandem glaubhaft weismachen, dass 90° gleich 91° ist. Lassen Sie sich die folgende, auf die Skizze basierende Argumentation einmal durch den Kopf gehen und versuchen Sie selbst den Haken an der Sache herauszufinden, bevor Sie die Lösung einsehen.

Kurze einführende Beschreibung:

- Winkel CDA ist rechtwinklig
- $DA = CB$
- Winkel BCD = 91°
- F und M sind Mittelpunkte der Strecken [DC] und [AB]
- G ist der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten auf F und M.
- Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu



- (a) Da M die Mitte der Strecke AB ist, sind die Dreiecke AMG und BMG kongruent, denn sie haben einen rechten Winkel und zwei Seiten gemeinsam. Also sind auch die Winkel bei A und B gleich.
- (b) Eine entsprechende Argumentation zeigt, dass auch die Dreiecke DFG und CFG kongruent sind. Also sind auch die Winkel δ (bei D) und γ (bei C) gleich.
- (c) Hieraus folgt, dass auch die Dreiecke ADG und BCG kongruent sind, denn ihre Seiten sind alle gleich.
- (d) Insbesondere folgt hieraus wiederum, dass der große Winkel bei D ($\delta + 90$) und der große Winkel bei C ($\gamma + 91$) gleichgroß sind. Wegen $\delta = \gamma$ ist also $90^\circ = 91^\circ$, fertig.

Lösung:

Der Schnittpunkt G der beiden Mittelsenkrechten liegt in Wirklichkeit viel, viel höher als in der Skizze angenommen. Wenn man sich vorstellt den Punkt G immer weiter nach oben zu verschieben, verändert sich auch die Strecke BG, sie wird immer steiler. In der Realität liegt der Punkt G so weit oben, dass die Strecke BG außerhalb vom Punkt C verläuft. Somit existiert das Dreieck BCG eigentlich nicht, sondern man wird nur durch die Skizze getäuscht (wie schon erwähnt, sie ist nicht maßstabsgetreu). Somit ist die ganze Argumentation über den Haufen geworfen und der „Beweis“ ist widerlegt.

An diesem Abend wollen sie einmal nicht sofort schlafen gehen. Lukas zumindest nicht, er wollte lieber feiern gehen. "Richard, du Langweiler, wie willst du jemals jemanden kennenlernen, wenn du dich nicht mal traust, mit mir in eine Disko zu gehen. Was ist nur los mit dir?" - "Ach, weißt du, Lukas, wir haben heute doch schon so viel gesehen. ich bin müde, lass uns lieber morgen weggehen. Wir könnten uns fröhs an den Strand legen und in der Sonne chillen und baden und abends wären wir ausgeruht und fit." Na gut, Lukas lässt sich doch überreden. Besser, als den ganzen Abend mit einem griesgrämigen Richard herumzulaufen, der sowieso nur jeden abschrecken würde. Am nächsten Abend machen sie sich also auf den Weg. In einer Disco trinken sie zuerst gemütlich ein oder zwei oder viele Bier und dann verschwindet Lukas auf dem Dancefloor. Richard fühlt sich deswegen etwas alleingelassen und nach einer Weile denkt er sogar ernsthaft darüber nach, auch tanzen zu gehen. Aber da sieht er am anderen Ende der Bar ein einsames Mädchen sitzen. Durch einen plötzlichen Anfall von Mut angetrieben, spricht er sie an. Sie heißt Sarah und sagt, dass sie genauso alt ist, wie Anne.

How old is Anne?

Mary is 24 years old. She is twice as old as Anne was, when she was as old as Anne is now. How old is Anne now? A says the answer is 16; B says 12. Which is correct?

Mary ist 24 Jahre alt. Sie ist zweimal so alt, wie Anne war, als sie so alt war, wie Anne jetzt ist. Wie alt ist Anne jetzt? A sagt, dass die Antwort 16 ist; B ist der Meinung, sie ist 12. Wer hat Recht?

Diese Frage scheint zuallererst verwirrend und schwer lösbar, schaut man sich den Text aber jedoch einmal etwas genauer an, so kann man durch etwas Nachdenken und etwas mathematischem Geschick auf die Antwort kommen. Veranschaulichen wir das ganze vorerst einmal in einer Tabelle:

Marys Alter jetzt	Marys Alter früher	Annes Alter jetzt	Annes Alter früher
24	x	x	$24 / 2 = 12$

Da Mary wie Anne zwischen ihrem früheren und dem jetzigen Alter gleich viele Jahre erlebt haben, ergibt sich folgende Gleichung:

$$24 - x = x - 12$$

Wir setzen hier also den Altersunterschied der beiden zwischen früher und jetzt gleich, der natürlich derselbe sein muss.

Jetzt kommen wir zum Auflösen der Gleichung:

$$24 - x = x - 12 \quad | + x$$

$$2x - 12 = 24 \quad | + 12$$

$$2x = 36 \quad | / 2$$

$$x = 18$$

Da nach dem Auflösen der Gleichung $x = 18$ herauskommt, sieht man, dass Annes Alter jetzt und Marys Alter früher 18 beträgt. Die Schwierigkeit solcher Aufgaben besteht meistens darin, verstrickt formulierte Sätze in ein einfach verständliches Bild oder eine klare Tabelle umzuwandeln. Hat man dies geschafft, kann man eine Gleichung des gesuchten Wertes aufstellen und nach dem Auflösen dieser Gleichung kommt man zu dem gewünschten Ergebnis.

Sarah ist echt witzig und charmant und die zwei verbringen noch ein paar Tage mit ihr und ihren Freundinnen am Strand, mit Beachvolleyball, Schwimmen und Bananaboatfahren. Plötzlich haben die beiden aber richtig Lust auf einen Klimawechsel. Normale Leute würden einfach wieder nach Hause fliegen, aber sie fliegen gleich weiter nach Norwegen. Dort ist es Winter und sie können außerdem gleich noch ein Paar Verwandte von Lukas besuchen. Genug Geld haben sie ja. Lukas hat auch diesmal nicht vergessen, dass Richard ganz und garnicht gerne in Flugzeuge steigt. Deswegen hat er sein kleines Rätsel sogar in einen Briefumschlag gesteckt und eine Schleife herumgebunden. Richard liebt nämlich Geschenke.

Kakuro

Kreuzworträtsel mit Zahlen

	16	5			18	6		25	4
8				9	3			10	
					21				
15				16					
	15	5	24				17		
									12
7				11			24	13	
				11					
16					21	6	10		
			33						
								17	6
	14	11	4	18				12	
							16		
11						22			
27							11		

Das ist ein Kakuro. Sieht aus wie ein Kreuzworträtsel, nur mit Zahlen. So ähnlich funktioniert es auch, aber keine Angst, bei diesem Spiel gibt es immer mindestens eine richtige Lösung. Ihre Aufgabe ist es, sie zu finden!

Zuerst die Regeln:

Um die Felder zu füllen, dürfen die Zahlen von 1 bis 9 benutzt werden. Jede einzelne davon darf aber nur ein mal bei der Darstellung einer Zahl als Summe verwendet werden.

Erlaubt ist also zum Beispiel $16 = 9 + 7$, aber nicht $16 = 8 + 8$

Hier noch einige Tipps, die das Lösen erleichtern:

Überlegen sie sich zuerst einmal aus welchen Zahlenkombinationen eine Zahl zusammengesetzt werden kann.

Nehmen wir 8 als Beispiel:

$8 = 1 + 2 + 5$ oder $8 = 5 + 3$ oder $8 = 4 + 3 + 1$ oder $8 = 2 + 6$ oder $8 = 1 + 7$

Andere Möglichkeiten bestehen nicht, um 8 zu zerlegen, ohne dabei eine Zahl 2 mal zu nehmen.

Tun Sie dies bei Zahlen, die besonders häufig vorkommen oder ihnen besonders schwierig erscheinen und erstellen Sie sich damit eine Liste.

Suchen Sie zunächst nach den Zahlen im Kakuro, die aus einer eindeutigen Kombination bestehen müssen:

Stellenanzahl	Zahl	Kombination
2 Stellen	3	1 2
	4	1 3
	16	7 9
	17	8 9
3 Stellen	6	1 2 3
	7	1 2 4
	23	6 8 9
	24	7 8 9
4 Stellen	10	1 2 3 4
	11	1 2 3 5
	29	5 7 8 9
	30	6 7 8 9
5 Stellen	15	1 2 3 4 5
	16	1 2 3 4 6
	34	4 6 7 8 9
	35	5 6 7 8 9

Können sie noch keine Zahl sicher eintragen empfehle ich ihnen, die Möglichkeiten klein mit Bleistift in das Feld einzutragen, dann müssen Sie im weiteren Verlauf nicht nochmals neu überlegen, was für das Feld in Frage kommt.

Schauen Sie nun, welche Kombinationen für längere Lücken und größere Zahlen in Frage kommen. Wo gibt es Überschneidungen? Eigentlich braucht man nur etwas Zahlengefühl und muss addieren können, um das Rätsel zu lösen.

Geben Sie nicht auf, nach einer Weile bekommt man ein Gefühl für richtige Kombinationen! Denken Sie immer daran: Am Ende gibt es nur eine richtige Lösung, also wenn Sie einen Fehler machen, fällt es Ihnen früher oder später selbst auf!

Viel Spaß beim Rätseln!

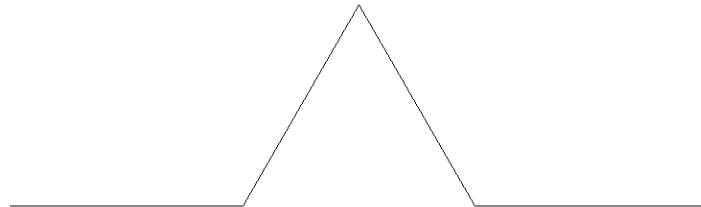
Lösung

Als sie in Trondheim aus dem Flieger steigen, schneit es. Lukas ist glücklich. Mit Schnee verbindet er lange Tage auf seinem Snowboard, Skifahren, Langlauf und Schlittenfahren. Und seine Familie mag diese Dinge auch. Das weiß er noch von früher, als sie jeden Winter zu Besuch nach Norwegen gefahren sind. Richard verbindet damit natürlich wieder ganz andere Dinge.

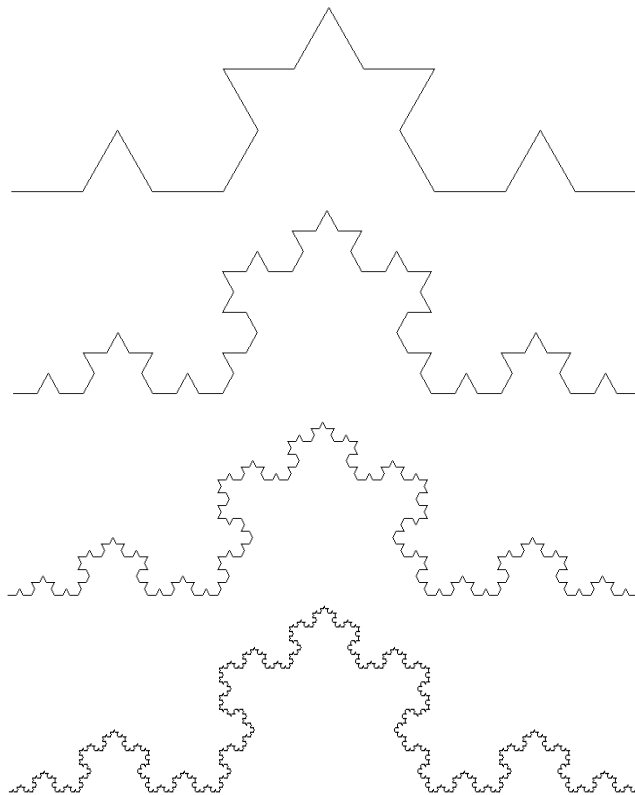
Koch-Figuren

Die Koch-Kurve, auch kochsche Kurve genannt, ist eins der am häufigsten zitierten Beispiele für ein Fraktal (Objekt, dass sich selbst ähnlich ist).

Man kann sie folgendermaßen bilden: Man teilt eine Strecke in 3 Teile auf und ersetzt den mittleren Streckenabschnitt durch 2 Strecken, bei denen jede so lang ist wie 1/3 der Grundstrecke.



Dies ist das Grundschema welches nun beliebig unendlich oft fortgesetzt werden kann. Mit jedem weiteren Schritt nähert sich das Gebilde der Koch-Kurve.



Wenn man sich die Länge der Koch-Kurve anschaut kommt man zu folgender Formel:

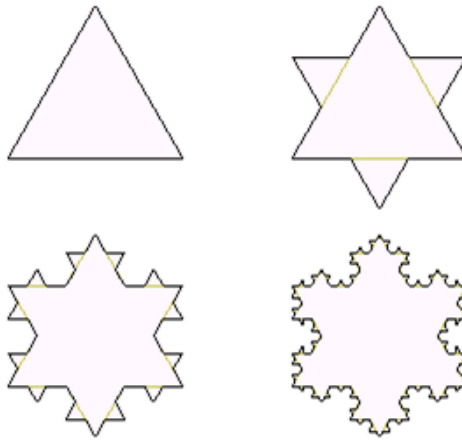
$$L_{KochKurve} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad (n = \text{Anzahl der Iterationsschritte})$$

Wenn man sich nun den Flächeninhalt anschaut fällt auf, dass dieser nicht konstant steigt. Denn nach der ersten Iteration entsteht ein Dreieck, dass den angenommenen Flächeninhalt von 1 besitzt. Danach kommen 4 neue Dreiecke dazu, die dann jeweils einen Flächeninhalt von $\frac{1}{9}$ haben usw.

Somit kommt man am Ende auf einen gesamten Flächeninhalt von $\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$

Kochsche Schneeflocke

Die Kochsche Schneeflocke basiert auf dem gleichen Schema wie die Koch-Kurve. Jedoch dient als Anfang nicht eine Strecke sondern ein gleichseitiges Dreieck. Somit besteht sie aus 3 Koch-Kurven ist jedoch nicht im Vergleich zur Koch-Kurve selbst ähnlich. Sie sieht folgendermaßen aus:



"Wenn ich dich jetzt nicht schon so lange kennen würde, würde ich glatt denken, dass du irgendwie spinnst, Richard." - "Manchmal denk ich das auch von dir, wie kann man nur überall etwas finden, was man machen kann, du siehst nur einen Ball und schon bist du komplett versunken, kickst halt einfach mal ein bisschen rum." - "Ja, wir sind schon zwei Seltsame." - "Aber sag mal, wie viele Leute muss ich da eigentlich schon wieder kennenlernen?" - "Kennst du das Rätsel vom Kommissar Schönewolf?" "Nein, leider nicht, aber erzähl!"

Familientreffen

Jedes Jahr im Juli lädt Kommissar Schönewolf seine große Familie zu einem Familientreffen nach Weißenburg ein. In diesem Jahr schafften es zum ersten Mal alle zu kommen, so ist es kein Wunder, wie viel los ist, die Familie besteht nämlich aus Oma und Opa, zwei Vätern, zwei Müttern, vier Kindern, drei Enkeln, einem Bruder, zwei Schwestern, zwei Söhnen, zwei Töchtern, einem Schwiegervater, einer Schwiegermutter und einer Schwiegertochter. Oma Schönewolf, schon etwas alt, aber eine begnadete Knoblerin, kann wegen ihres grauen Stars nicht mehr gut sehen und fragt ihre Enkelin schließlich, wie viele Familienmitglieder denn nun eigentlich da sind.

Ihre Enkelin Fridda gibt ihr dieses Rätsel als Antwort:

"Oma, wenn du eine beliebige zweistellige Zahl dreimal hintereinander stellst, dann kannst du die resultierende sechsstellige Zahl immer ohne Rest durch die Anzahl unserer Familienmitglieder teilen!"

Damit hat sie gleich zwei knifflige Fragen gestellt:

- Wie groß ist die Mindestanzahl der Mitglieder von Familie Schönewolf?
- Und warum ist jede wie oben (durch dreifaches Hintereinanderstellen einer beliebigen zweistelligen Zahl) gebildete sechsstellige Zahl ohne Rest durch diese Mindestanzahl teilbar?

Viel Spaß beim Rätseln!

Lösung

"Sieben Leute, puh, ich dachte schon, du kommst da mit einer riesigen Wikingersippe an." - "Ich versteh schon, ich seh so stark aus, wie ein Wikinger, deswegen ist es logisch, dass du auf solche Ideen kommst" - "Schmarrkopf". Draußen vor dem Flughafengebäude wartet eine einsame etwas ältere Frau mit einem Kofferschieber. "Tante Smilla!" Lukas freut sich riesig, seine Tante wieder zusehen, lässt sein Gepäck fallen und rennt auf sie zu. Die Arme kommt ganz schön aus der Puste, vor lauter Lachen und reden und von Lukas herumgewirbelt werden. Richard kommt auch aus der Puste und kriegt noch einen roten Kopf gratis dazu. Er kämpft sich grade nämlich mit seinem Rucksack, seinem Koffer, Lukas Tasche und Lukas Koffer bis zu den beiden durch. "Das ist übrigens Richard, der Mathestudent, mit dem ich mir im Moment die WG teile." - "Mathe, sagst du? Das wär doch was für unsere kleine Merle, die kommt im Moment nicht so gut klar, vielleicht kannst du ihr ein bisschen mit Mathe helfen?" - "Gerne." Richard ist voll in seinem Element. Im Kopf geht er schon ein Paar Rechenricks durch, die dem kleinen Mädchen bestimmt helfen werden.

Rechenricks

Damit das Kopfrechnen nicht zur ewigen Tortur wird, gibt es einige Rechenricks mit denen man es sich sehr erleichtern kann.

- Das Quadrieren von Zahlen zwischen 40 und 50

Das Quadrieren von größeren Zahlen im Kopf kann sich als sehr schwer erweisen. Hier ein Tipp wie das bei den Zahlen zwischen 40 und 50 einfacher geht:

Als Beispiel nehmen wir hier die Zahl 43:

Zuerst rechnet man $43 - 25 = 18$, wodurch man die ersten 2 Stellen des 4-stelligen

Ergebnisses von 43^2 erhält. Nachdem man dies getan hat muss man 43 von 50 abziehen: $50 - 43 = 7$. Das Ergebnis dieser Subtraktion muss man nun quadrieren um die letzten zwei Stellen zu erhalten: $7^2 = 49$. Befolgt man diese Schritte kommt man zu dem Schluss, dass $43^2 = 1849$

ist. Hier noch einmal die allgemeine Formel:

$$(25 - (50 - x)) \cdot 100 + (50 - x)^2$$

Das x entspricht einer Zahl zwischen 40 und 50.

- Das Quadrieren von Zahlen, deren zweite Stelle eine 5 ist.

Will man eine solche Zahl mit sich selbst multiplizieren, gibt es einen Trick, der dies um einiges vereinfacht. Nehmen wir zum Beispiel die Zahl 25 zum Quadrat: Zuerst wird $2 \cdot (2 + 1)$ gerechnet, was 6 ergibt. Nun wird noch eine 25 angehängt und man hat das Ergebnis: $25^2 = 625$

Die allgemeine Formel: $(x \cdot (x + 1)) \cdot 100 + 25$

Der Term umgeformt: $100 \cdot x^2 + 100 \cdot x + 25$

Das x entspricht der ersten Ziffer der zu quadrierenden Zahl.

- Das Multiplizieren von zweistelligen Zahlen

Dies kann sich oft als schwierig erweisen, doch auch hier gibt es eine Möglichkeit es sich einfacher zu machen: Wollen wir das Ergebnis von $18 \cdot 14$ ausrechnen, so müssen wir

$$\left(\frac{18+14}{2}\right)^2 - \left(\frac{18-14}{2}\right)^2 = 256 - 4 = 252.$$

Zum Schluss noch die allgemeine Formel: $x \cdot y = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

Eine ebenfalls sehr einfache Methode für die Multiplikation von zweistelligen Zahlen unter 20 ist die folgende: Man addiert die hintere Ziffer der einen Zahl zur anderen · Zahl und multipliziert mit 10. Danach addiert man zu diesem Resultat das Produkt der beiden Einer-Ziffern:

$$15 \cdot 17 = (15 + 7) \cdot 10 + 5 \cdot 7 = 220 + 35 = 255$$

- Die Multiplikation mit 11

Die Multiplikation mit 11 ist sehr einfach: Man nimmt die erste Ziffer der Zahl und die letzte, dazwischen schreibt man die Summe der beiden Ziffern. Hier wird $11 \cdot 14$ berechnet:

$$11 \cdot 14 = 1 (1 + 4) 4 = 154$$

Bei Rechnungen, bei denen die Summe größer als 10 ist ist jedoch Vorsicht geboten:

$11 \cdot 47 \rightarrow$ hier beträgt die Summe der beiden Ziffern 11. Die erste 1 wird zur 4 addiert, während die zweite stehen gelassen wird: $11 \cdot 47 = (4 + 1) 17 = 517$

Smilla fährt die beiden zu ihrem Blockhaus, wo der Rest der Familie schon wartet und ein wunderbar großer Tisch gedeckt ist. Neugierig schaut sich Richard das Essen an. Gesehen hat er so etwas zwar noch nie, aber riechen tut es gut und das ist die Hauptsache, denkt er sich. Nach einem lustigen Spieleabend mit Lukas' Familie legt er sich glücklich und zufrieden in sein Bett und liest noch ein bisschen in seinem Lieblingsbuch - über Mathe, versteht sich.

Innenwinkelsumme im n-Eck

Ein Innenwinkel einer ebenen, geradlinig begrenzten, geometrischen Figur ist ein von zwei Seiten eingeschlossener Winkel, der innerhalb einer Figur liegt.

Ein n-Eck beschreibt eine geschlossene, geometrische Figur (aus geraden Seitenlinien) mit n Ecken.

Die Innenwinkelsumme ist Summe aller Innenwinkel einer Figur.

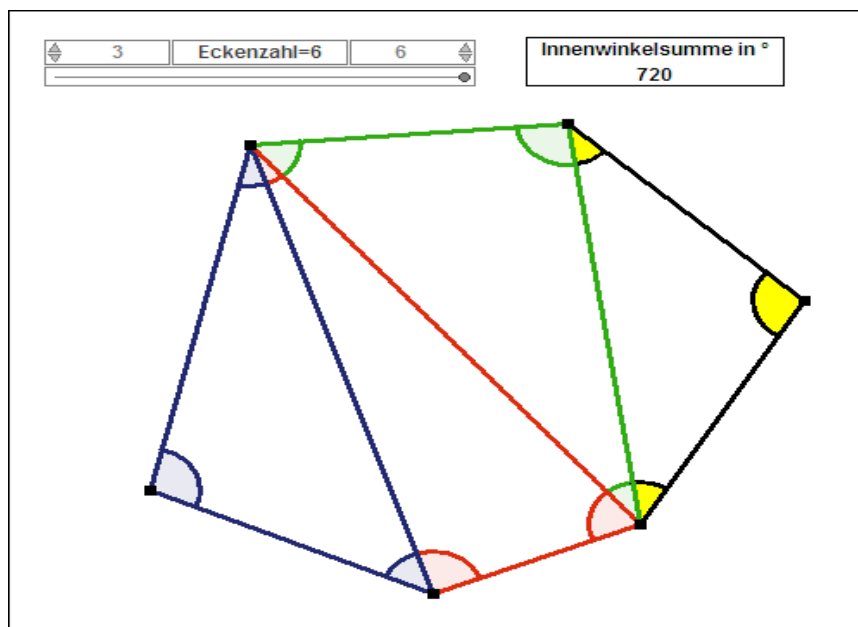
Die allgemeine Formel für die Innenwinkelsumme eines n-Ecks:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ$$

Die Herleitung dieser Formel geschieht durch eine Zerlegung eines n-Ecks in Dreiecke und die Grundvoraussetzung, dass alle Dreiecke eine Innenwinkelsumme von 180° haben. Bei der Zerlegung entstehen immer zwei Dreiecke weniger, als die geometrische Ausgangsfigur (n-Eck) Ecken besitzt (d.h., es entstehen $n - 2$ Dreiecke). Die Innenwinkel der entstehenden Dreiecke müssen ohne Überschneidungen zu den Innenwinkeln des n-Ecks gehören. Ein Viereck kann man durch eine einzige Gerade in zwei Dreiecke unterteilen. Ein Fünfeck kann man durch zwei Geraden in drei Dreiecke unterteilen. Ein Sechseck mit drei Geraden in 4 Dreiecke usw...

Die folgende Grafik zeigt an einem Beispiel die Zerlegung eines 6-Ecks in Dreiecke. Die Berechnung der dazugehörigen Innenwinkelsumme geschieht durch Einsetzen der Eckenanzahl in die oben genannte Formel:

$$\begin{aligned}(n - 2) \cdot 180^\circ &= (6 - 2) \cdot 180^\circ \\ &= 4 \cdot 180 \\ &= 720^\circ\end{aligned}$$



Am nächsten Morgen wacht er erst um 11 Uhr auf, so tief und fest hat er geschlafen. Da es Samstag ist, und keine Schule, sitzt Merle gerade an ihren Hausaufgaben. Division und Bruchrechnen. Richard ist zwar noch in Boxershorts, aber das hält ihn nicht auf, ein Paar schlaue Regeln loszuwerden.

Teilbarkeitsregeln

Als Teilbarkeit wird die mathematische Beziehung zwischen zwei ganzen Zahlen bezeichnet. Eine Zahl gilt als durch eine andere Zahl teilbar, wenn nach der Division kein Rest übrig bleibt. Dies ist zum Beispiel bei $15 : 3 = 5$ der Fall, 5 und 3 sind also Teiler von 15, was bedeutet, dass bei den Divisionen $15 : 5$ und $15 : 3$ kein Rest entsteht. Sollte dies nicht der Fall sein so ist keine Teilbarkeit vorhanden. Beispiel: $5 : 3$ hinterlässt einen Rest von 2

Wichtige Eigenschaften:

- Jede Zahl ist durch sich selbst teilbar
- Jede Zahl ist durch 1 teilbar
- Jede Zahl ist ein Teiler der Zahl 0

Teilbarkeitsregeln:

- Ist die letzte Ziffer einer Zahl gerade (0, 2, 4, 6, 8) so ist die Zahl durch 2 teilbar
- Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist. Beispiel: 424 ist durch 4 teilbar, da 24 (424) durch 4 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist. Beispiel: 5120 ist durch 8 teilbar, da 120 (5120) durch 8 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer der Zahl 0 oder 5 ist.
- Endet die Zahl auf eine 0, so ist sie durch 10 teilbar.
- Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Quersumme der zu teilenden Zahl 9 beträgt.
- Beispiel: 234 ist durch 9 teilbar, da: $2 + 3 + 4 = 9$
- Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn die Quersumme der Zahl 3 ist.
- Beispiel: 201 ist durch 3 teilbar, da: $2 + 0 + 1 = 3$
- Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie auch durch 2 und 3 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch 100 bzw. 1000 teilbar, wenn sie auf 00 bzw. 000 endet.
- Eine Zahl ist dann durch 25 teilbar, wenn die aus den letzten 2 Ziffern gebildete Zahl durch 25 teilbar ist (00, 25, 50, 75)

In den nächsten Tagen genießen die beiden die Ruhe und Idylle der norwegischen Region Innherred mit ihren weitläufigen Wanderwegen, dem Meer und den Wäldern und dem Schnee. Lukas liebt dieses Gefühl der Freiheit. Er steht am Meer, blickt in die Ferne, die Wellen rauschen, der Wind weht ihm die Haare aus dem Gesicht, die Luft riecht nach Salz, der Kies und der Schnee knirschen unter seinen Füßen. Am liebsten würde er hier nie wieder wegfahren. Aber die zwei wollen ja schließlich noch die Welt sehen. Und die ist furchtbar groß und voller Überraschungen. Als nächstes möchte Richard nach Griechenland. Er redet nur noch von Pythagoras, Diogenes, Thales von Milet, Sokrates und Aristoteles. Aber weil es dorthin eine lange Reise ist, hat Lukas natürlich wieder ein schönes Rätsel für Richard gefunden:

Magische Zahlenquadrate

Magische Zahlenquadrate sind zunächst einfache Zahlenquadrate mit der Kantenlänge n ($n > 2$), in deren Felder die Zahlen $1, 2, \dots, n^2$ so angeordnet werden müssen, dass die Summe aller Spalten, Zeilen und der beiden Diagonalen (auch magische Zahl genannt) gleich ist.

Diese magische Zahl kann man sich leicht errechnen, indem man alle Zahlen des Quadrates zusammen addiert und durch n teilt.

Doch selbst mithilfe dieser Zahl gibt es leider kein einheitliches Verfahren, um magische Quadrate zu konstruieren.

Magisches Quadrat
der Ordnung 3

Allerdings gibt es neben den normalen magischen Zahlenquadraten auch spezielle Varianten, bei welchen zusätzliche Einschränkungen gefordert sind. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist das magische Quadrat aus Albrecht Dürers Melencolia I, das abgesehen von den Grundvoraussetzungen etliche weitere Eigenschaften vorzuweisen hat:

- Die Summe der Eck-, sowie der Zentrumsfelder ergibt die magische Zahl 34
- Die Summe der vier Quadranten ist jeweils die 34
- Die Summe der jeweils 1 oder 2 Felder von den Eckpunkten im Uhrzeigersinn weiterversetzten Feldern ergibt 34

Nun sind Sie an der Reihe. Schaffen Sie es diese magischen Quadrate auszufüllen?

4	14		
9		6	
		10	8
16	2	3	

Leicht

Schwer

	3	2	
5			8
	6	7	
4			1

Lösung

Die Lösung für das Anfänger-Nonogramm:

						1		
						1	1	3
		3	1	5	0	3	1	1
1	1	3						
1	1	1						
	3	3						
	1	1						
	1	3						

Die Lösung für das Fortgeschrittene-Nonogramm:

[illegible]

Zurück

Lösung Magische Zahlenquadrate:

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

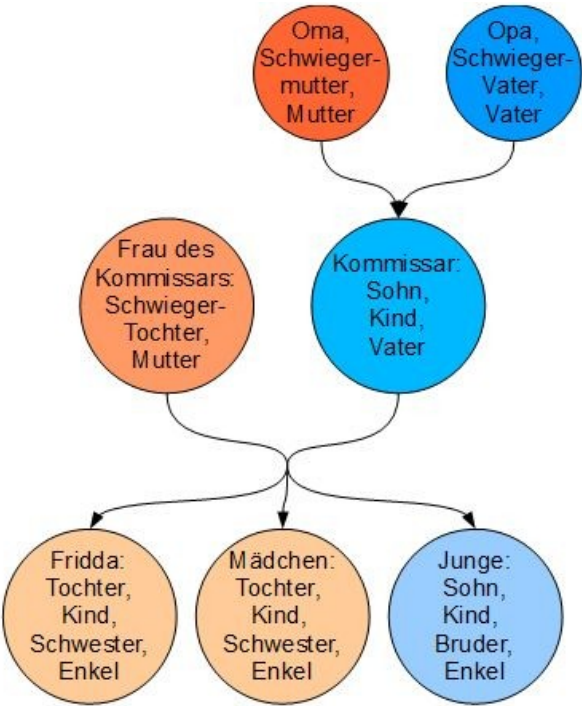
[Zurück](#)

Lösung Kakuro:

	16	5			18	6		25	4
8	7	1	9		3	2	1	10	9
15	9	4	2		21	5	4	7	2
	15	5	24	7	9	8		17	9
7	6	1	11	7	4		14	5	9
16	9	4	3		21	6	10	2	4
			33	8	4	5	7	9	
			18	8	1	9		12	9
11	5	3	1	2		22	6	9	5
27	9	8	3	7		11	7	3	1

Zurück

Lösung Familentreffen:



Die Familie muss also mindestens 7 Mitglieder haben, wenn alle so viele Funktionen übernehmen, wie möglich.

Wie soll es jetzt aber funktionieren, dass jede beliebige zweistellige Zahl, dreimal hintereinander geschrieben, durch sieben teilbar ist?

Wir ersetzen eine zweistellige Zahl durch die Buchstaben

ZE

(Z steht dabei für die Zehnerziffer der Zahl, E für die Einerziffer).

Schreibt man diese jetzt dreimal hintereinander, erhält man:

ZEZEZE

Jede normale mehrstellige Zahl kann man auch als Summe ihrer Stellen schreiben:

$$483 = 4 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

Auch unsere Zahl aus den Buchstaben kann man so schreiben:

$$ZE \cdot 10\,000 + ZE \cdot 100 + ZE \cdot 1$$

$$= ZE \cdot (10\,000 + 100 + 1)$$

$$= ZE \cdot 10\,101$$

$$= ZE \cdot \mathbf{7} \cdot 1\,443$$

Hieraus können wir sehen, dass egal welche zweistellige Zahl wir dreimal hintereinander stellen, wir bekommen immer ein Ergebnis, das durch 7 teilbar ist.

Oma Schönfelder jedenfalls hatte an dieser Lösung eine ziemlich harte Nuss zu knacken.

Zurück

II Reinhold und Werner auf Reisen

Die begleitende Geschichte handelt von Reinhold und Werner, zwei ehemalige Lehrer, die sich zusammen auf einer Europareise befinden. Im Moment treiben sich die Beiden für wenige Tage in Griechenland herum. Sie besichtigen gerade den Parthenon, den "Griechischen Tempel", auf der Akropolis in Athen.

Reinhold: Hey Werner, ich hab grad in nem Buch über die Vermehrung von Tieren gelesen, und da...

Werner: Jaja, hast halt im Urlaub einfach nix besseres zu tun als Biobücher zu lesen.

Reinhold: Was gibt's Schöneres als ein Buch über die Vermehrung von Tieren zu lesen und das mit Blick auf diesen wunderbaren Tempel, Natur und Kultur vollkommen im Einklang. Aber zurück zu meiner Frage, da stand so ne mathematische Formel über die Vermehrung drin und da kam so ein komischer Buchstabe, nämlich e drin vor, weißt du vielleicht, was das heißt?

Werner: Ja, als guter Mathematiker kennt man e natürlich, das ist nämlich die Eulersche Zahl, benannt nach ihrem Entdecker, das ist eine irrationale und transzendente Zahl, ähnlich wie die Kreiszahl Pi.

Reinhold: Aha, das ist aber sehr interessant, diesen Euler muss ich sofort mal googeln, dieses neue Smartphone, das ich mir für den Urlaub gekauft hab, ist echt super.

Werner: Ja, während du mit deinem Handy spielst, erzähl ich dir mal was über die Eulersche Zahl, die ist nämlich in der Mathematik extrem wichtig, vor allem als Basis für Exponential- und Logarithmusfunktionen. Zum Beispiel diese Formel aus deinem Buch war bestimmt auch so eine Exponentialfunktion.

Reinhold: Ja, das stand sogar dort. Aber eine Frage hab ich, Ich kann mir diese Zahl so überhaupt nicht vorstellen, was die sein soll. Also bei π weiß man ja, dass ist das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises. Aber diese Eulersche Zahl, wie kann man die Begreifen, wenn die da nur als Basis einer Exponentialfunktion steht?

Die Euler'sche Zahl e

Die Euler'sche Zahl e ist neben der Kreiszahl π die wohl wichtigste mathematische Konstante und ebenso wie diese irrational und transzendent. Das bedeutet, dass sie weder als Dezimalzahl bzw. Bruch, noch als Lösung einer algebraischen Gleichung (endlichen) Grades dargestellt werden.

Doch was hat diese abstrakte Zahl, deren Wert ungefähr 2,71828 beträgt, an praktischem Nutzen oder anders gefragt, wie kann man sich diese abstrakte Zahl vorstellbar machen? Eine gute Möglichkeit dazu ist die Zinseszinsrechnung:

Stellen Sie sich vor, es gäbe eine Bank in Utopia, die Ihnen auf Ihr angelegtes Guthaben traumhafte 10% Zinsen pro Jahr zahlt. Was würde mit Ihrem Geld passieren, abgesehen davon, dass es sehr wahrscheinlich durch eine massive Inflation entwertet würde? Natürlich vermehrt es sich und wie viel Geld hätten Sie nach 10 Jahren mehr, wenn Sie 1€ angelegt hätten? Viele Menschen würden es vermutlich mitfolgender Gleichung auszurechnen versuchen:

$$1\text{€} \cdot 10\% \cdot 10 \text{ (Jahre)} + 1\text{€ (Anfangsguthaben)} = 2\text{€}$$

Diese Rechnung mag sinnvoll und richtig erscheinen, ist aber falsch, da die Zinsen pro Jahr ausgezahlt und, wenn sie nicht abgehoben werden, gutgeschrieben werden, und das neue Guthaben auch wieder verzinst wird.

Deshalb muss man folgendermaßen rechnen:

Nach 1 Jahr:	$1\text{€} \cdot 10\% + 1\text{€} = 1,10\text{€}$
Nach 2 Jahren:	$1,10\text{€} \cdot 10\% + 1,10\text{€} = 1,21\text{€}$
Nach 3 Jahren:	$1,21\text{€} \cdot 10\% + 1,21\text{€} = 1,33\text{€}$
Nach 4 Jahren:	$1,33\text{€} \cdot 10\% + 1,33\text{€} = 1,46\text{€}$
Nach 5 Jahren:	$1,46\text{€} \cdot 10\% + 1,46\text{€} = 1,61\text{€}$
Nach 6 Jahren:	$1,61\text{€} \cdot 10\% + 1,61\text{€} = 1,77\text{€}$
Nach 7 Jahren:	$1,77\text{€} \cdot 10\% + 1,77\text{€} = 1,95\text{€}$
Nach 8 Jahren:	$1,95\text{€} \cdot 10\% + 1,95\text{€} = 2,14\text{€}$
Nach 9 Jahren:	$2,14\text{€} \cdot 10\% + 2,14\text{€} = 2,37\text{€}$
Nach 10 Jahren:	$2,37\text{€} \cdot 10\% + 2,37\text{€} = 2,59\text{€}$

Das sind 59ct mehr, als man eigentlich gedacht hätte.

Doch was geschieht, wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern monatlich ausgezahlt würden. Und zwar mit einer Verzinsung von 10/12 %, oder gar täglich, oder stündlich? Würde das Kontoguthaben bis ins Unendliche ansteigen? Nein, es würde sich an einen festen Wert annähern, nämlich an die Eulersche Zahl e .

Außerdem hat die Eulersche Zahl noch weitere praktische Bedeutungen, beispielsweise für exponentielle Wachstumsfunktionen bzw. Abnahmefunktionen, die unter anderem das Wachstum einer Tierpopulation oder den Zerfall radioaktiver Substanzen beschreiben. Aber besonders in der Mathematik trifft man diese Zahl häufig an. Sie dient als Basis für die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion, weiterhin um komplexe Zahlen anzugeben oder in vielfältiger Weise in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Werner: *e ist natürlich nicht die einzige irrationale Zahl. Da gibt's natürlich noch π , oder die Wurzel von Zwei.*

Reinhold: *Mit Pi hat sich ja schon der alte Archimedes befasst.*

Werner: *Das stimmt. Er hat die Kreiszahl allerdings noch nicht als „ π “ bezeichnet. Dennoch vermutet man, dass Archimedes im Zusammenhang mit π eines der ersten numerischen Verfahren aufgestellt hat, d.h. eine Möglichkeit, π annähernd zu bestimmen.*

Reinhold: *Das musst du mir genauer erklären.*

Die Kreiszahl π

π , Archimedes-Konstante, Ludolphsche Zahl, 3,14159... oder einfach Pi – sie alle bezeichnen die *Kreiszahl „Pi“*. Sie ist *transzendent*, d.h. man kann ihren Wert nicht in einer allgemeinen Gleichung darstellen. Da die Zahl eine unendliche Anzahl von Nachkommastellen besitzt, die sich nicht in ihrer Folge wiederholen, also *aperiodisch* sind, spricht man von der *Irrationalität* von π . Durch diese Eigenschaften muss bei der Beschreibung von π auf das griechische Symbol ausgewichen werden.

Woher nun die Beschreibung als Kreiszahl? Ganz allgemein beschreibt π das Verhältnis zwischen dem Kreisumfang U und dessen Durchmesser d und lässt somit auch Aussagen über die Kreisfläche A zu. Die elementarsten, unausweichlichen Formeln lauten also

$$U = d\pi = 2r\pi \quad \text{und} \quad A = r^2\pi .$$

Und exakt dafür benötigt man sie auch – für jegliche Formen, die vorbei an Dreieck, Rechteck etc. eine „radiale“ Abhängigkeit haben, etwa im 2-dimensionalen Bereich Kreise und 3-dimensional die Kugel, aber auch abgewandelte Körper wie Kegel.

Da π wie erwähnt unendlich viele Nachkommastellen hat, ist nur eine „Annäherung“ an den Wert von π möglich. Man kann also lediglich über verschiedene Verfahren, an denen sich bereits frühe Mathematiker wie Archimedes oder Heron versuchten, immer mehr Nachkommastellen berechnen. Die elementarste Herangehensweise ist der Vergleich des Kreises mit n-Ecken. Beginnend mit bspw. einem Quadrat um den Kreis kann man mit steigender Eckzahl sich nach und nach an die Kreisform annähern und somit immer genauere Aussagen über den Kreisumfang und somit auch rückläufig über π selbst treffen. Unter Verwendung des Mittelwerts von dem Kreis ein- und umbeschriebenen n-Ecken kann die Werterfassung noch optimiert werden. Für die Bestimmung vieler Nachkommastellen ist das Verfahren jedoch weniger gut geeignet: Allein für die dritte Nachkommastelle benötigt man bereits ein 96-Eck.

Eine heutzutage geläufige Methode ist das Monte-Carlo-Verfahren, bei dem man sich Berechnungen über Wahrscheinlichkeiten zu Nutze macht.

Das Monte-Carlo-Verfahren

Das Monte-Carlo-Verfahren ist ein stochastisches (d.h. mit Zufallsexperimenten durchgeführtes) Verfahren zur Bestimmung der Zahl π . Es eignet sich perfekt zur spielerischen Durchführung. Wir brauchen dazu ein Blatt Papier, einen Bleistift, ein Lineal/Geodreieck einen Zirkel, einen Taschenrechner und mindestens einen Dartpfeil. Es funktioniert folgendermaßen:

Wir nehmen das Blatt Papier und zeichnen ein Quadrat darauf. Anschließend ziehen wir einen Viertelkreis in diesem Quadrat, indem wir in eine der Ecken einstecken. Das Papier hängen wir nun an einer Dartscheibe oder einer Pinnwand auf. Nun kommen wir zum spaßigen Teil, denn wir dürfen das Papier nun mit dem Dartpfeil bewerfen. Wir müssen dabei darauf achten, dass der Dartpfeil möglichst zufällig auftrifft. Es ist also überlegenswert, die Augen beim Werfen zu schließen.

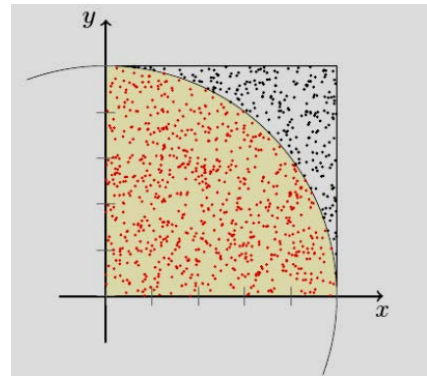
Nach mehrmaliger Durchlöcherung des Papiers sind wir gefragt, die Anzahl der gesamten Löcher und die Anzahl der Löcher, die sich innerhalb des Viertelkreises befinden, zu zählen. Mit dem Verhältnis zwischen der Anzahl im Viertelkreis und der Gesamtanzahl lässt sich nämlich π geteilt durch vier bestimmen.

Als Gleichung also

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{K}{N}$$

Wobei K die Anzahl der Löcher im Viertelkreis und N die Gesamtzahl der Löcher ist.

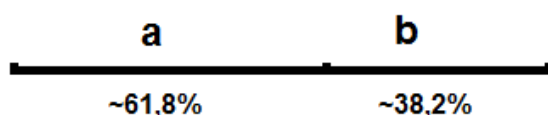
Demnach müssen wir nur unsere beiden Zahlenwerte durcheinander teilen und anschließend mit vier multiplizieren, um eine Annäherung an π zu erhalten. Jedoch muss gesagt sein, dass es bei jedem stochastischen Verfahren, und damit auch hierbei, mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu einem vollkommen falschen Ergebnis kommen kann, zum Beispiel wenn Sie ein zu guter Dartspieler sind und die Pfeile nicht mehr zufällig werfen. Ist jedoch eine gewisse Zufälligkeit gegeben, dann kann man die Genauigkeit des Ergebnisses erhöhen, indem man die Anzahl der Zufallsexperimente, also der Würfe, erhöht. Wenn man also nur zwei Würfe durchführt, darf es einen also nicht verwundern, wenn man als Ergebnis für π einen glatten Wert wie Vier erhält. Wenn jemandem die Dartwürfe nicht ausreichen, kann er immer noch die Punkte im Schaubild oben zählen.



- Reinhold:** *Davon hab ich schon geträumt, seit ich denken kann, einmal vor dem Parthenon auf der Akropolis in Athen stehen, dieser höchsten Blüte antiker Architektur. Wie wunderbar...*
- Werner:** *Wenn du dich so für Griechenland und antike Architektur interessierst, wieso warst du dann nicht schon mal hier?*
- Reinhold:** *Ehrlich gesagt, weiß ich das nicht, denn die antiken Griechen waren wohl das fortschrittlichste Volk ihrer Zeit, hier wurde die Demokratie erfunden, aber was ist nur aus dieser hochentwickelten Kultur geworden? Heute stehen sie kurz vor dem Staatsbankrott und müssen von der EU finanziert werden, echt traurig.*
- Werner:** *Darüber müssen wir jetzt nicht nachdenken, wir schauen uns hier jetzt einfach al den Parthenon an. Wusstest du übrigens, dass das Verhältnis zwischen Länge und Breite dieses Gebäudes fast dem goldenen Schnitt entspricht?*
- Reinhold:** *Ja, das hab ich schon mal gehört, soweit ich weiß, haben die antiken Architekten, dieses Verhältnis des öfteren verwendet, weil es besonders schön aussehen soll. Ich hab auch mal gehört, dass der goldene Schnitt in der Natur häufig auftritt.*
- Werner:** *Ja, das kann sein, aber hast du dich mal gefragt, was der goldene Schnitt mathematisch bedeutet?*
- Reinhold:** *Nein eigentlich nicht.*

Der Goldene Schnitt

Die antiken Griechen haben vor 2500 Jahren eine Hochkultur hervorgebracht, die uns heute noch durch ihre schönen Vasen und Skulpturen, aber auch durch ihre ästhetische Architektur fasziniert. Ein besonders harmonisch wirkendes Verhältnis, das zur Ästhetik der griechischen Architektur beigetragen hat ist der so genannte Goldene Schnitt. Man spricht vom goldenen Schnitt, wenn eine bestimmte Strecke so geteilt wird, dass die größere der beiden entstehenden Teilstrecken sich zur Gesamtstrecke so verhält, wie die kleinere zu der größeren Teilstrecke. Das Verhältnis zwischen größerer und kleinerer Teilstrecke bezeichnet man als goldene Zahl ϕ .



Der Zahlenwert von ϕ beträgt ungefähr $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

Stehen zwei Strecken in diesem Verhältnis zueinander werden sie als besonders harmonisch wahrgenommen. Dies haben schon die antiken Griechen erkannt, die die Fassade ihrer

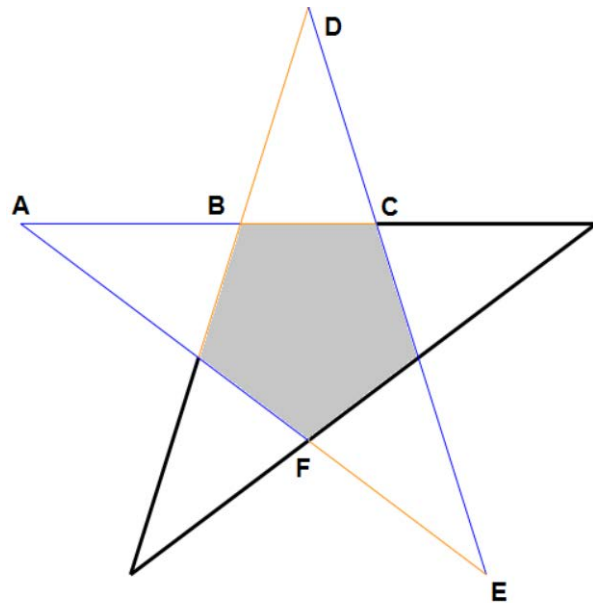
Tempel häufig so angelegt haben, dass Breite und Höhe in diesem Verhältnis zueinander stehen.

Es war auch ein alter Grieche, der den Goldenen Schnitt „entdeckt“ hat, als er ein Pentagramm betrachtete und vermaß:

Bei einem solchen Pentagramm steht jede Strecke zu mehreren anderen im Verhältnis des Goldenen Schnittes, hier sind beispielhafte Streckenpaare jeweils in Blau und Gelb gefärbt.

Schon bei steinzeitlichen Faustkeilen standen Länge und Breite oft annähernd im Verhältnis des Goldenen Schnittes.

Auch Künstler bedienten sich dieses Verhältnisses, wie zum Beispiel der Renaissance-Künstler Leonardo da Vinci, bei dessen Mona Lisa der goldene Schnitt eine Rolle spielt.



(Urheber: Nils Boßung)

Aber nicht nur der Mensch verwendet den goldenen Schnitt, auch in der Natur taucht er häufig auf.

Ein sehr eindrucksvolles Beispiel hierfür ist die Anordnung der Blätter bei niedrigen Krautpflanzen (z.B. Wegerich). Dort schließt ein Blatt mit einem bestimmten anderen den sog. Goldenen Winkel ($= 360^\circ - 360^\circ / \varphi = 137,5^\circ$) ein, diese Anordnung ermöglicht eine gleichmäßige Photosyntheserate in allen Blättern.

Auch beim menschlichen Körper tauchen öfter Verhältnisse auf, die dem Goldenen Schnitt sehr nahe kommen, zum Beispiel im Gesicht. Es wurde auch oft diskutiert, dass der Nabel, den menschlichen Körper im goldenen Schnitt teile, aber in der Realität schwankt dieses Verhältnis sehr stark.

Reinhold und Werner haben ihre Reise nach Rom fortgesetzt und besuchen jetzt den berühmten Zoo von Pisa, wo eine Hasenart lebt, die ein ganz eigenartiges Reproduktionsverhalten aufweist.

Reinhold: Nun sieh dir einmal an, was in dem Gehege hier ist, Werner: ‚Die berühmten pisanischen Hasen, erdacht von Leonardo da Pisa.‘

Werner: Was? Erdacht? Wie geht denn das? Lies weiter!

Reinhold: Ähm... ‚Ihre Population steigt so enorm, dass sie fast das Gehege überflutet hätten und bald die ganze Stadt unter ihrem Gewicht erdrückt hätten...‘

Werner: Was ist das denn für eine Science-Fiction? Wie schnell vermehren sich diese Hasen denn bitte?

Reinhold: Dies ist zurückzuführen auf die Art und Weise, wie sie sich reproduzieren: Die Schwangerschaft eines Weibchens dauert genau einen Monat und sie gebärt immer ein Männchen und ein Weibchen, die nach einem weiteren Monat geschlechtsreif sind und so wie ihre Eltern sofort mit der Fortpflanzung anfangen. Ein solches Hasenpaar scheint nicht natürlich zu sterben, weshalb ihre Population stetig wächst.

Werner: Das heißt also, dass jeden Monat jedes erwachsene Hasenpaar ein weiteres Hasenpaar Junge kriegt und zudem die neugeborenen Hasen vom Monat davor plötzlich geschlechtsreif sind und unverzüglich ihren Trieben nachgehen.

Reinhold: Schaut ganz so aus.

Werner: Komischer Typ, dieser da Pisa... Aber wenn man sich einmal überlegt, wie schnell sich die Hasen vermehren, ist es verständlich, warum der pisanische Zoo schnell handeln musste, um eine Katastrophe zu vermeiden. Es gibt bestimmt eine mathematische Formel um die Hasenpopulation zu einer bestimmten Zeit zu bestimmen.

Die Fibonacci-Folge

Die *Fibonacci-Folge*, benannt nach Leonardo da Pisa, auch Leonardo Fibonacci genannt, ist eine unendliche Zahlenfolge. Sie basiert auf zwei Startwerten und einem außerordentlich einfachen Bildungsgesetz:

$$\begin{aligned}F_1 &= 1, \\F_2 &= 1, \\F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}.\end{aligned}$$

Hierbei ist F_n die n -te Zahl in der Fibonacci-Folge, auch n -te Fibonacci-Zahl genannt. Nach dem Bildungsgesetz ergibt sich diese Zahl aus der Summe der zwei vorherigen Fibonacci-

Zahlen, mit der Ausnahme der ersten und zweiten Fibonacci-Zahl, die beide mit Eins gegeben sind.

Wollen wir also die vierte Fibonacci-Zahl berechnen, dann gehen wir folgendermaßen vor:

$$F_4 = F_3 + F_2,$$

$$F_4 = F_2 + F_1 + F_1 + F_0,$$

$$F_4 = F_1 + F_0 + 1 + 1 + 0,$$

$$F_4 = 1 + 0 + 1 + 1 + 0,$$

$$F_4 = 3.$$

An diesem Beispiel ist zu erkennen, dass bereits für sehr kleine Werte von n das Berechnen von F_n eine komplexe Aufgabe ist, obwohl die Fibonacci-Zahlen doch ein so einfaches Bildungsgesetz haben.

Die Fibonacci-Zahlen haben jedoch weitere interessante Eigenschaften zu bieten; betrachten wir dazu die folgende Tabelle:

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Hieran kann man auf den ersten Blick sehen, dass die Größe der Fibonacci-Zahlen rapide steigt. Was jedoch auch in den Fibonacci-Zahlen steckt, ist die Eigenschaft, dass der Quotient aus zwei aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen sich dem soeben kennengelernten *goldenen Schnitt* annähert, zum Beispiel:

$$\frac{F_{18}}{F_{14}} = \frac{610}{377} \approx 1,61804 \approx \varphi$$

Auch in der Natur findet man die Fibonacci-Zahlen wieder, nämlich bei den Spiralen von Kernen einer Sonnenblume, bei der Schale einer Ananas oder bei der Form von Tannenzapfen.

Als Reinhold und Werner den Zoo gerade verlassen wollten, sieht Werner eine Römische Zahl, die über dem Eingangstor geschrieben steht.

Werner: Reinhold, schau mal da. Was für eine Zahl ist das da über dem Tor? MCMXI?

Reinhold: Ich glaube, das ist das Eröffnungsjahr des Zoos. 1911 müsste dass gewesen sein.

*Werner: Da hast du bestimmt Recht.
Aber wusstest du eigentlich, dass man mit römischen Zahlen auch Rechnen kann?*

Reinhold: Na klar, beim Addieren muss man einfach die Werte der Ziffern von den Zahlen, die man zusammen zählen möchte, addieren. III + V ergibt VIII, also $3 + 5$ ergibt 8.

Werner: Das stimmt. Mit einem Trick konnten die Römer ihrer Zahlen sogar multiplizieren.

Multiplizieren mit römischen Zahlen

Zeichen	I	V	X	L	C	D	M
Wert	1	5	10	50	100	500	1000

Rechnen vor mehr als 2 Jahrtausenden hätte so einfach sein können, wären da nicht die römischen Zahlen gewesen. Bei diesem System handelt es sich um ein Additionssystem, d.h. ein Zahlensystem, bei dem sich der Wert einer Zahl ergibt, indem man alle Werte ihrer Ziffern addiert. Bei einem Stellenwertsystem hingegen ist der Wert einer Zahl von den Werten ihrer Ziffern und deren Stelle abhängig. Ein Beispiel hierfür ist unser oft genutztes Dezimalsystem. Mit den Zahlen 0 bis 9 können wir unendlich große Zahlen darstellen. Beim römischen Zahlensystem kann jedoch schon bei einer kleinen Zahl eine Darstellung mit relativ vielen Stellen entstehen:

Römisches Zahlensystem

CCCLXXXVIII

10 Stellen

Dezimalsystem

388

3 Stellen

Nicht nur aus diesem Grund gestaltete sich das Rechnen für die Römer schwierig und umständlich. Vor Allem bei der Multiplikation stand ihnen so manche Hürde im Weg, da die additive Zahlenschrift eine sehr sperrige Rechnung hervorruft.

Die nun vorgestellte Methode der schriftlichen Multiplikation römischer Zahlen behilft sich mit Halbierungen und Verdoppelungen und ist sogar in diesem altertümlichen Zahlensystem gut einsetzbar.

Beispiel: 13 · 234

Zuerst teilt man die zwei Faktoren in eine zweispaltige Tabelle ein.

XIII (13)	CCXXXIV (234)
-----------	---------------

In der linken Spalte werden die Zahlen halbiert und darunter geschrieben, bis man die Zahl 1 erreicht hat, wobei immer auf ganze Zahlen abgerundet wird.

XIII (13)	CCXXXIV (234)
VI (6)	
III (3)	
I (1)	

In der rechten Spalte werden die Zahlen dementsprechend oft verdoppelt und darunter geschrieben.

XIII (13)	CCXXXIV (234)
VI (6)	CDLXVIII (468)
III (3)	CMXXXVI (936)
I (1)	MDCCCLXXII (1872)

Nun addiert man alle Zahlen der rechten Spalte, bei denen in der linken Spalte eine ungerade Zahl steht.

XIII (13)	CCXXXIV (234)
III (3)	CMXXXVI (936)
I (1)	MDCCCLXXII (1872)

Nach der Addition dieser Zahlen erhält man das Ergebnis der Multiplikation.

CCXXXIV	(234)
CMXXXVI	(936)
+ MDCCCLXXII	(1872)
MMMXLII	(3042)

Hier: 13 · 234 = 3042

Probieren sie es doch selbst einmal aus:
XIV · CLVI = ???

XIV	CLVI

+ _____

Lösung:

XIV (14)	CLVI (156)
VII (7)	CCCXII (312)
III (3)	DCXXIV (624)
I (1)	MCCXLVIII (1248)

$$\begin{array}{r} \text{CCCXII (312)} \\ \text{DCXXIV (624)} \\ + \text{MCCXLVIII (1248)} \\ \hline \text{MMCLXXIV (2184)} \end{array}$$

Werner: Ganz schön verblüffend, dass die Römer da ein ganz anderes Prinzip verwendeten.

Reinhold: Vielleicht ein bisschen umständlich. Aber sag mal, wenn unser Dezimalsystem von 0 bis 9 geht, dann gibt es doch theoretisch auch andere Stellenwertsysteme?

Werner: Klar, das ist gar nicht mal so unüblich wie man denkt. Die Informatiker könnten davon ein Lied singen...

Das Dualsystem

Das heutzutage weltweit verwendete dezimale Stellenwertsystem (ehemals aus indischen und arabischen Ursprüngen) ist für Rechenschritte, wie sie der Mensch durchführt und sich vorstellt, wohl zweifellos die verständlichste Variante. Allerdings existieren darüber hinaus weitere Stellenwertsysteme, erstellt zur Verwendung für andere Zwecke oder Instanzen.

11,00100100001111110110101010001000100001011010001100001...

Diese zunächst unverständliche Zahlenfolge hat wohl jeder bereits in seiner Mathematiklaufbahn gesehen. Es ist lediglich die Darstellung, die uns ungewöhnlich erscheint: Es handelt sich hierbei um die ersten Ziffern der Kreiszahl π , notiert im Dualsystem. Auch bekannt als Binärsystem ist dies das übliche Zahlensystem bspw. für interne Rechenvorgänge in Maschinen und Computern. Anders als in unserem gewöhnlichen Dezimalsystem wird hier nicht zwischen Ziffern von 0 bis 9 ($\rightarrow$ 10 verschiedene Ziffern: lat. decem: „zehn“) unterschieden, sondern lediglich zwischen Nullen und Einsen ($\rightarrow$ lat. dualis: „zwei enthaltend“). Praktisch angewendet muss die Maschine also nur noch zwischen einem „wahren“ (1) und „falschen“ (0) Zustand unterscheiden.

Wollen wir die obige Zahlenfolge für uns verständlich machen, müssen wir auf die Grundlage der binären Darstellung eingehen. Parallel zum Dezimalsystem gewinnen die Ziffern vor dem Komma von rechts nach links an Wert, Ziffern hinter dem Komma nehmen in Leserichtung nach rechts ab. Allerdings steht die Reihenfolge der Zahlen nicht im Wert Einer – Zehner – Hunderter – Tausender - ..., sondern, beginnend bei 1, praktisch jeweils für den doppelten Wert der vorhergehenden Stelle, d.h. Einer – Zweier – Vierer – Achter -

Man spricht daher von der *Basis 2*. Die 0 und 1 unterscheidet zuletzt nur noch, ob eine Zahl diesen, durch die Reihenfolge bestimmten, Zahlenwert enthält. Betrachten wir also erneut unsere π -Sequenz, bedeutet „11“ vor dem Komma übersetzt *eine* Eins und *eine* Zwei vorhanden, addiert somit 3 (vgl. $\pi = 3,14...$). Formal konvertiert man also am Beispiel:

$$\begin{aligned} 1101101_2 &= 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 \\ &= 1 + 0 + 4 + 8 + 0 + 32 + 64 \\ &= 109_{10} \end{aligned}$$

Ausgehend von der genannten *Basis 2* ist die rechte, beginnende Stelle „wahr“. Wie in informatikbezogenen Bereichen üblich wird von der *nullten* Stelle an gezählt. Der nullte Stellenwert ($2^0 = 1$) ist also einmal ($1 \cdot$) vorhanden, anders als der *erste* Stellenwert

$\frac{109}{2} = 54$	Rest 1
$\frac{54}{2} = 27$	Rest 0
$\frac{27}{2} = 13$	Rest 1
$\frac{13}{2} = 6$	Rest 1
$\frac{6}{2} = 3$	Rest 0
$\frac{3}{2} = 1$	Rest 1
$\frac{1}{2} = 0$	Rest 1

($2^1 = 2$), der nicht ($0 \cdot$) vorhanden ist. Dieses System wird nun lediglich bis zur linken, abschließenden Stelle weitergeführt. Entgegengesetzt kann mittels der Division aus dezimaler Darstellung in die binäre konvertiert werden: Beginnend mit unserer Dezimalzahl wird diese bzw. die Zwischenergebnisse schrittweise durch 2 dividiert und der *Rest* notiert, bis als Ergebnis 0 übrig bleibt. Lesen wir nun die Restwerte von unten nach oben, erhalten wir erneut unsere Binärzahl.

Die Vorteile die ein Computer aus dem Binärsystem zieht liegen letztendlich in der Bauweise. Die „Grundelemente“ auf den Platinen, die Transistoren, müssen, wie zuvor genannt, jeweils nur zwischen zwei Zuständen unterscheiden (Spannung liegt an/nicht an) und können daher deutlich simpler konstruiert werden.

Werner: Kennst du eigentlich Eratosthenes?
 Reinhold: Era... was? Kenn ich nicht!
 Werner: Eratosthenes von Kyrene, er war ein außergewöhnlich vielseitiger griechischer Gelehrter.
 Reinhold: Ich glaube ich kann mich erinnern...
 Hat er nicht irgendetwas mit einem Sieb erfunden?
 Werner: Ja, genau, den Sieb des Eratosthenes.
 Damit lassen sich Primzahlen bis zu einer vorgegebenen Zahl aus einer Liste bestimmen.
 Reinhold: Primzahlen, davon hab ich das letzte Mal in der Schule gehört.
 Ich glaube, ich sollte meine Kenntnisse dazu wieder auffrischen.

Primzahlen

997, 7, 101, 31, 29, 2, 11, 463, 79, 71

Was haben diese zehn Zahlen gemeinsam?

Jede der zehn Zahlen ist eine natürliche Zahl.

Jede der zehn Zahlen hat genau zwei Teiler, zwei ganze positive Zahlen, nämlich 1 und sich selbst.

Es handelt sich hier um zehn sogenannte **Primzahlen**.

Das Wort "Primzahl" leitet sich vom lateinischen "numerus primus" ab und bedeutet "die erste Zahl".

Eigenschaften:

- Alle Primzahlen mit Ausnahme der Zahl 2 sind ungerade.
- Primzahlen treten anscheinend unregelmäßig auf, es lässt sich kein Muster erkennen.
- Primzahlen sind unendlich. Hierfür stellte der griechische Mathematiker Euklid von Alexandria einen Beweis auf.
- Die momentan größte bekannte Primzahl (Stand März 2012) hat 12978189 Stellen:

$$2^{43.112.609} - 1$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Abgebildet sind alle natürlichen Zahlen bis 100, wobei die Primzahlen rot markiert sind.

Gegenbegriff zur Primzahl ist die **zusammengesetzte Zahl**, also eine Zahl, die neben eins und sich selbst mindestens einen weiteren Teiler besitzt.

Die Zahlen 0 und 1 sind weder prim noch zusammengesetzt, weil sie nur einen bzw. unendlich viele Teiler haben.

Reinhold: Wahnsinn, dass die größte bekannte Primzahl fast 13 Millionen Stellen hat!

Werner: Ja, unglaublich was die modernen Computer alles ausrechnen können.

Es gibt aber noch viele Probleme und Phänomene, die die Technik noch nicht lösen konnte.

Reinhold: Was meinst du denn genau?

Werner: Ich spreche von der Unendlichkeit der Primzahlzwillinge.

Reinhold: Was sind denn Primzahlzwillinge?

Primzahlzwillinge

Wir wissen nun was Primzahlen sind.

Doch worum handelt es sich jetzt bei Primzahlzwillingen?

Primzahlzwillinge sind zwei Primzahlen, die den Abstand zwei haben.

An der folgenden Auflistung lässt sich dies erkennen, Primzahlzwillinge sind fett gedruckt:

2, **3**, **5**, **7**, **11**, **13**, **17**, **19**, 23, **29**, **31**, 37, **41**, **43**, 47, 53, **59**, **61**, 67, **71**, **73**, 79, 83, 89, 97
.....

Zwischen zwei Primzahlen, die einen Primzahlzwillings, liegt eine Zahl, die man Zentralzahl nennt. Zum Beispiel stellt die Zahl 18 die Zentralzahl des Primzahlzwillinges 17 und 19 dar. Auffällig ist, dass - mit Ausnahme des ersten Primzahlzwillinges 3 und 5 - die Zentralzahl immer durch 6 teilbar ist. Somit hat ein Primzahlzwillings folgende Form: $6n \pm 1$

Seit mehr als 2000 Jahren ist bekannt, dass unendlich viele Primzahlen existieren. Allerdings reduziert sich die Anzahl, je höhere Bereiche man betrachtet.

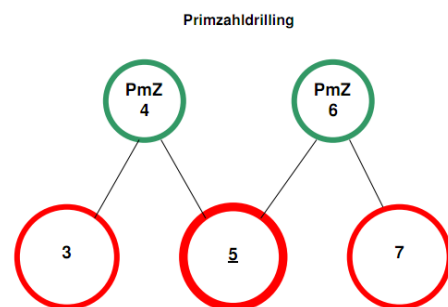
Deshalb sinkt die Chance einen Primzahlzwillings zu finden logischerweise in solchen Bereichen.

Das bedeutet aber nicht gleichzeitig, dass es nur eine begrenzte Anzahl an Primzahlen mit dem Abstand zwei gibt. Denn bis heute wurde weder die Unendlichkeit, noch die Endlichkeit der Primzahlzwillinge bewiesen.

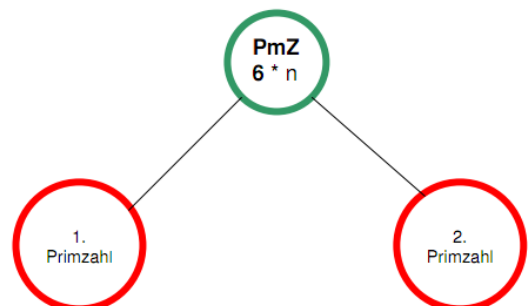
Es können somit im Bezug hierauf nur Behauptungen aufgestellt werden.

Fakten:

- Der größte bekannte Primzahlzwillings (Stand Dezember 2011) hat 200700 Ziffern:
 $3756801695685 \cdot 2^{666669} \pm 1$
- 3 und 5 bilden den kleinsten Primzahlzwillings.
- Der einzige Primzahltrilling ist 3, 5 und 7.



- Ein Primzahlvierling, d.h. zwei Primzahlzwillinge mit dem Abstand vier, existiert nicht.



- Reinhold: Ich hab mal eine Frage, du hast doch Ahnung von Mathe. Ich hab mal im Internet ein bisschen rumgeschaut und da bin ich über einen Text über die Zahl Wurzel 2 gestolpert, also ich weiß ja was Wurzeln sind, aber ich hab nicht verstanden, wieso diese Zahl irrational sein soll.*
- Werner: Bitte ernsthaft, du bist hier in Italien, der Kulturation Europas schlechthin, es ist schön warm, und du surfst die ganze Zeit bloß im Internet.*
- Reinhold: Ja, ich mag halt mein neues Smartphone, das ist ein Computer im Handyformat, das war früher undenkbar, da waren Computer noch so groß wie ganze Zimmer und hatten nicht mal so viel Rechenleistung wie ein heutiger Taschenrechner.*
- Werner: Egal, zurück zu deiner Frage, Irrational bedeutet einfach, dass du dies Zahl nicht als endlichen Bruch darstellen kannst.*
- Reinhold: Aber wieso kann man das nicht.*
- Werner: Ja, das akzeptiert man halt, das ist halt einfach so.*
- Reinhold: Das musst du erstmal beweisen.*

Irrationalität von Wurzel 2

Wie Reinhold sehr gut bemerkt hat, benötigt einen mathematischen Beweis, um sagen zu können, dass die Wurzel aus 2 Irrational ist. Beweise sind ein wichtiger Bestandteil der Mathematik, da sie endgültige und feststehende Aussagen ermöglichen, im Gegensatz zu Naturwissenschaften, in denen lediglich Theorien aufgestellt werden, die solange gelten, bis sie widerlegt werden. Es gibt verschiedene Beweise für die Irrationalität der Wurzel aus 2, einer der bekanntesten und auch einfachsten stammt vom griechischen Mathematiker Euklid aus dem 4. Jahrhundert vor Christus. Das Problem ist also schon über 2300 Jahre alt.

Der Beweis des Euklid ist indirekt, das bedeutet, dass er nicht bewiesen hat, dass Wurzel 2 irrational ist, sondern, dass es nicht rational ist. Er ging also davon aus, dass Wurzel 2 rational ist, formte anschließend den entstehenden Term um, bis ein Widerspruch entstand, der nur gelöst werden kann, indem man die Annahme Wurzel 2 sei rational, verwirft.

Die Annahme, Wurzel 2 sei rational, beinhaltet, dass sie sich als Quotient aus zwei teilerfremden Zahlen darstellen lässt. Wir verwenden hier die Variablen a und b.

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$; durch Quadrierung erhält man daraus:

$2 = \frac{a^2}{b^2}$; was sich folgendermaßen umformen lässt:

$$2b^2 = a^2;$$

An dieser Stelle ist es recht schwierig weiterzukommen, denn man muss einiges über gerade und ungerade Zahlen wissen. Eine Zahl heißt gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist, ist sie dies nicht, so heißt sie ungerade. Eine gerade Zahl kann man also allgemein als $2n$ schreiben, eine ungerade als $2n+1$. Quadriert man nun diese allgemeinen Formeln, so erhält man:

$$(2n)^2 = 2(2n^2)$$

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

Daraus wird ersichtlich, dass das Produkt einer geraden Zahl stets gerade, das einer ungeraden stets ungerade ist.

Zurück zum euklidischen Beweis, $2b^2$ muss eine gerade Zahl sein, weshalb auf Grund der Gleichung auch a^2 gerade ist. Da, wie eben gezeigt, das Quadrat einer Zahl nur dann gerade ist, wenn die Zahl selbst auch gerade ist, so muss a ebenfalls gerade, also durch 2 teilbar sein.

Daraus folgen kann man a folgendermaßen schreiben:

$a = 2c$; setzt man nun diese Gleichung in $2b^2 = a^2$ ein, so erhält man:

$$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2; \text{ durch zwei dividiert liefert:}$$

$$b^2 = 2c^2;$$

$2c^2$ und somit auch b^2 ist eine gerade Zahl, da ein Quadrat aber nur gerade sein kann, wenn die Basis ebenfalls gerade ist, folgt hieraus, dass b ebenfalls eine gerade Zahl, und somit durch zwei teilbar sein muss.

Somit sind sowohl a und b durch zwei teilbar, aber am Anfang haben wir festgelegt, dass die Zahlen teilerfremd sein müssen, somit haben wir den Beweis zu einem Widerspruch (lat: „ad absurdum“) geführt.

Vielleicht fragen sie sich jetzt, wieso es so wichtig ist, dass beide Zahlen teilerfremd sein müssen. Mal angenommen beide Zahlen wären durch zwei teilbar, so könnte man den Bruch einfach mit zwei kürzen, die Zahlen des neuen Bruches könnte man aber wieder mit a und b bezeichnen, man könnte die Umformungen oben beliebig oft wiederholen und den Bruch beliebig oft mit zwei kürzen, was in der Realität selbstverständlich nicht möglich ist.

Reinhold nimmt sich beim nach Hause gehen noch einen Flyer vom pisanischen Zoo mit. Er faltet das DIN A4 Blatt einmal in der Mitte zu einem DIN A5 Blatt zusammen.

Reinhold: Sag mal, warum bezeichnet man dieses Blatt als DIN A4? Und wieso nennt man die Hälfte davon DIN A5? Hat das einen Grund oder ist das einfach nur so.

Werner: Weißt du das nicht? Nicht schlimm mein alter Freund. Ich erzähl dir die Geschichte des DIN A4 Blattes.

Reinhold: OH!! Danke, dass du dir so viel Mühe gibst mich weiterzubilden.

Werner: Kein Thema. Du weißt ja ich war Lehrer. Das liegt in meiner Natur.

Reinhold: War ich auch, nur nicht für Mathe. Also fang an, ich höre dir gespannt zu.

Werner: Also pass auf. Es ist so...

Papierformat DIN A4

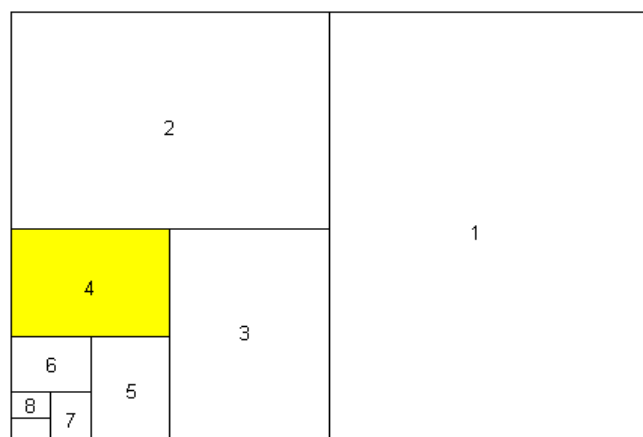
Jeder kennt es doch nur wenige verstehen es wirklich. Na kommen sie darauf wovon ich rede? Na von dem DIN A4 Blatt natürlich, welches der Weggefährte eines jeden während der Schulzeit war. Es hatte sehr viele Verwendungsmöglichkeiten. Hauptsächlich ist es zum Beschreiben oder zum Austeilen in Form eines bedruckten Arbeitsblattes gedacht. In der heutigen Zeit kann es aber noch für viele andere Sachen benutzt werden wie etwa zum Falten und Basteln oder, für die ganz kreativen Schüler unter uns, zum Bewerfen unserer Mitmenschen oder Verschießen kleiner Papierkugeln via passendem Blasrohr. „Hey Moment mal! Lese ich gerade ein Buch über Mathematik oder über die Geschichte des Papiers?“ Das werden Sie vermutlich gerade eben gedacht haben. Aber keine Sorge, sie Lesen immer noch ein Buch über Mathematik. Denn; ob Sie es wussten oder nicht, das DIN A4 Papierformat hat ein ganze Menge spannender Mathematik zu bieten. Halbiert man es so bleibt die Form gleich. Man nehme zum Beispiel ein DIN A4 Blatt, halbiere es um ein DIN A5 Blatt gleicher Form zu erhalten. Dies liegt daran, dass das Seitenverhältnis (A4: $a = 297\text{mm}$; $a' = 210\text{mm}$)

Längere Seite a : kürzere Seite $a' = a' : \frac{a}{2}$ vorliegt. Dies führt dann zu

$$a : a' = \sqrt{2} \div 1$$

Also muss die Länge der längeren Seite das „ $\sqrt{2}$ “ – fache der kürzeren Seite sein.

Doch was bedeutet überhaupt die 4 in DIN A4? Man geht hierbei von einem Blatt A0 aus. A4 ist dann die 4. Teilung dieses Blattes in der Mitte. Die nachfolgende Skizze veranschaulicht dies sehr gut. Das besondere an DIN A0 ist, dass das Blatt genau 1 m^2 misst.



Reinhold und Werner spazieren durch die Stadt. Plötzlich entdeckt Werner ein Gebäude mit einem Dach, welches fast rechtwinklig ist.

Werner: Hey schau mal!!! Das Haus da drüben hat ein annähernd rechtwinkliges Dach.

Reinhold: Ja und ? Was ist daran jetzt so toll?

Werner: Naja wenn ich die Länge zweier Seiten kennen würde, könnte ich mithilfe des Satzes des Pythagoras die dritte berechnen. Soll ich es dir an einem einfachen Beispiel vorrechnen?

Reinhold: Ne du, lass mal stecken. Außerdem jeder Schüler kann den Satz des Pythagoras anwenden.

Werner: Ja aber nicht jeder kann zu dem Satz passende Zahlentripel erzeugen.

Reinhold: Was für Dinger?

Werner: Passende Zahlentripel, soll ich es dir zeigen?

Reinhold: Wenn es unbedingt sein muss.

Pythagoräische Zahlentripel

Ein pythagoräisches Zahlentripel wird von drei natürlichen Zahlen gebildet, welche als Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks vorkommen können. Diese drei Zahlen lösen somit auch den Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Das einfachste Beispiel eines solchen Tripels sind die Zahlen 3; 4; 5.

Es gibt mehrere Methoden zur Erzeugung solcher Tripel. Eine dieser Methoden geht so:

Man wählt zunächst zwei beliebige ganze Zahlen m und n mit $m > n$.

Anschließend setzt man

$$a = m^2 - n^2 \quad \text{und} \quad c = m^2 + n^2$$

b kann nun nicht mehr beliebig gewählt werden. Für b^2 gilt nun:

$$b = c^2 - a^2$$

$$b^2 = (m^2 + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2$$

$$b^2 = m^4 + 2 \cdot m^2 \cdot n^2 + n^4 - m^4 + 2 \cdot m^2 \cdot n^2 - n^4$$

$$b^2 = 4 \cdot m^2 \cdot n^2$$

$$b^2 = (2 \cdot m \cdot n)^2$$

Es folgt für b :

$$b = 2 \cdot m \cdot n$$

Nun bestimmt man Werte für m und n ($m > n$) und berechnet a , b und c . Somit erhält man ein pythagoräisches Zahlentripel. Mit dieser Methode kann man beliebig viele dieser Tripel erzeugen.

Hier einige Beispiele:

m	n	$a = m^2 - n^2$	$b = 2 \cdot m \cdot n$	$c = m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	2	12	16	20

Da du jetzt weißt, wie man ein pythagoräisches Tripel erzeugt, probiere sie es doch selbst einmal und erzeuge eines.

Tipp: Du kannst nachprüfen, ob deine Lösung korrekt ist, indem du deine Zahlen in die Formel

$a^2 + b^2 = c^2$ einsetzt und nachsiehst ob es passt.

- Reinhold: Rate mal, was ich gerade im Internet gelesen, da hat irgendjemand 100 000 Goldmark auf den Beweis von Fermats letzten Satz ausgesetzt!*
- Werner: Wirklich, aber da kommst du leider zu spät, der wurde nämlich schon bewiesen.*
- Reinhold: Oh, schade. Naja ich hätte ihn wahrscheinlich eh nicht beweisen können, ich weiß ja nicht mal, wie dieser Satz lautet.*
- Werner: Stand das etwa nicht im Internet?*
- Reinhold: Doch, aber den mathematischen Teil überspringe ich immer, mich interessiert Geschichte eben mehr.
Apropos Geschichte, weißt du wer dieser Fermat war?*
- Werner: Naja, der war hauptberuflich Jurist, Mathematik war nur sein Hobby, kann man gut verstehen, oder?
Er hat irgendwann im 17. Jahrhundert gelebt, man weiß nicht mal genau wann er geboren wurde, wohl irgendwann zwischen 1600 und 1610. Gestorben ist er dann 1665.*
- Reinhold: Oh, danke. Naja Mathematik als Hobby wär` glaub ich nichts für mich.
Aber was mich auch interessieren würde, ist wieso ich von diesem Satz schon vorher mal gehört hab, obwohl ich keine Ahnung von Mathematik habe.*
- Werner: Das wird alles gleich im nächsten Kapitel erklärt, viel Spaß!*

Fermats letzter Satz

Bestimmt kennen sie den Satz des Pythagoras $a^2+b^2=c^2$. Doch haben sie sich schon einmal gefragt, was passiert wenn man den Grad des Exponenten erhöht? Also statt 2 zum Beispiel 5 verwendet. Mit solchen Gleichungen beschäftigt sich auch Fermats letzter Satz oder auch Großer Fermat genannt.

Als Fermats letzten Satz bezeichnet man das Gesetz, dass die Gleichung

$$a^n + b^n = c^n$$

Für jedes n, das größer 2 ist, über der Grundmenge der natürlichen Zahlen, keine Lösung besitzt.

Die große Besonderheit an diesem Satz ist die Tatsache, dass es bei dieser Gleichung für kleinere Exponenten unendlich viele Lösungen gibt. Für den Exponenten 1 wären dies Gleichungen einer ganz gewöhnlichen Addition, zum

Beispiel: $2^1 + 5^1 = 7^1$;

Für den Exponenten 2 wären es Pythagoreische Zahlentripel, zum

Beispiel: $6^2 + 8^2 = 10^2$;

Dass diese Gleichung also für Exponenten größer als 2 einfach gar keine Lösung mehr haben soll, erscheint daher zunächst zumindest fragwürdig.

Eine weitere Besonderheit ist der Bezug zum französischen Mathematiker Pierre de Fermat, nach dem dieser Satz benannt ist. Der studierte nämlich im Jahr 1637 eine Ausgabe des antiken Mathematikwerkes Arithmetica von Diophant, dort las er den Satz des Pythagoras, zu dem er eine Randnotiz in sein Buch schrieb. Sie besagt, dass es unmöglich sei, eine natürliche Potenz in zwei Potenzen mit gleichem Exponenten wie die erste Potenz zu zerlegen, sofern der Exponent größer 2 ist.

Weiter schrieb er, dass er einen wunderbaren Beweis dafür gefunden habe, der Rand der Seite allerdings zu klein sei, um ihn niederzuschreiben. Jedoch hat er niemals einen Beweis für diese Vermutung veröffentlicht und auch im Nachlass des 1665 verstorbenen Mathematikers konnte kein solcher entdeckt werden. Über 350 Jahre lang versuchten Generationen von Mathematikern und interessierten Laien diesen Satz endgültig zu beweisen, doch sie alle fanden höchstens Teilbeweise, die die Gültigkeit des Satzes nur für ganz bestimmte Exponenten nachwiesen. Beispielsweise konnte selbst der legendäre Schweizer Mathematiker Leonhard Euler den Satz lediglich für die Exponenten 3 und 4, und entsprechend auch für deren Vielfache beweisen.

Das Interesse an einer Lösung dieser Vermutung war zeitweise so groß, dass im Jahr 1906 ein Privatmann in seinem Testament ein Preisgeld von 100 000 Goldmark auf den Beweis des Fermatschen Satzes ausgesetzt hat.

Ausbezahlt wurde es gut 90 Jahre später, im Jahr 1997 und zwar an Andrew Wiles, der im Jahr 1994 den Satz mittels elliptischer Kurven bewies. Da dieser Beweis nur durch hochmoderne Computertechnik erbracht werden konnte und aufgrund der Tatsache, dass Fermat selbst nie einen Beweis veröffentlichte und auch keiner in seinem Nachlass gefunden wurde, obwohl er nach seiner Notiz in der Arithmetica noch fast 20 Jahre lebt, vermutet man, dass Fermat keinen endgültigen Beweis für seine Vermutung hatte, sondern nur den Beweis, dass der Satz für den Exponent 4 gilt, was er womöglich verallgemeinern zu können glaubte.

Reinhold: Fermat hat wirklich viele und vor allem bedeutende Beiträge zur Mathematik geleistet.

Werner: Da hast du Recht, aber andere Mathematiker wie Euklid hatten auch eine große Bedeutung.

Reinhold: Womit hat sich Euklid denn beschäftigt?

Werner: Er hat zum Beispiel verschiedene Eigenschaften von perfekten Zahlen bewiesen.

Weißt du, was das ist, eine perfekte Zahl?

Reinhold: Nein, aber du als erfahrener Mathematiker kannst mir das bestimmt erklären.

Perfekte Zahlen

Zahlen gibt es unendlich viele - natürliche, ganze, ungerade, ...

Doch was macht eine Zahl perfekt?

Man nennt eine Zahl perfekt bzw. vollkommen, wenn die Summe ihrer Teiler (außer der Zahl selbst) die Zahl selbst ergibt.

Beispiel:

Die Zahl 6 hat die Teiler 1, 2, 3 und 6. Die Summe dieser Teiler - ausgenommen 6 - also $1 + 2 + 3$, ergibt 6. Somit ist die Zahl 6 eine perfekte Zahl. Sie ist die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft.

Je höhere Zahlen man betrachtet, desto schwieriger wird es eine perfekte Zahl zu finden. Die Nächsten lauten: 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328

Verschiedene Mathematiker entdeckten in der Geschichte der perfekten Zahlen, die sich über Jahrtausende erstreckte, einige interessante Eigenschaften.

1) Zum Beispiel sind alle vollkommenen Zahlen eine Summe aufeinanderfolgender Zahlen:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$496 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 30 + 31$$

2) Pythagoras zeigte, dass Summe der Teiler einer Zweierpotenz immer die Zweierpotenz minus 1 ist.

Zweierpotenz	Teiler	Summe
$2^2=4$	1, 2	3
$2^3=8$	1, 2, 4	7
$2^4=16$	1, 2, 4, 8	15

- 3) Euklid konnte aufzeigen, dass jede perfekte Zahl das Produkt zweier Zahlen ist, wobei ein Faktor eine Zweierpotenz und der Andere die nächst größere Zweierpotenz minus 1 ist.
 $6 = 2^1(2^2 - 1)$, $28 = 2^2(2^3 - 1)$, $496 = 2^4(2^5 - 1)$

- 4) Der griechische Mathematiker bewies darauf auch, eine Zahl der Form $2^{p-1}(2^p - 1)$ ist vollkommen, sofern $(2^p - 1)$ eine Primzahl ist.

Dennoch bleiben Unklarheiten im Bezug auf perfekte Zahlen. Bis heute ist keine ungerade vollkommene Zahl bekannt, jedoch wurde ihre Nichtexistenz ebenfalls nicht bewiesen. Die Perfekten Zahlen bleiben also weiterhin ein Mysterium.

Für den heutigen Tag haben sich Reinhold und Werner vorgenommen die "Galleria Tartaglia Arte", ein Museum in Rom, zu besuchen.

Reinhold: Sag mal, hast du auch das Gefühl, du hast den Namen Tartaglia schon einmal gehört?

Werner: Natürlich, Nicolo Tartaglia war ein venezianischer Mathematiker der Renaissance. Du müsstest ihn doch kennen?!

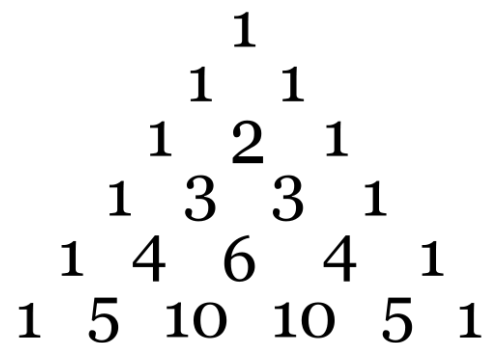
Reinhold: Ah, danke, dass mir auf die Sprünge geholfen hast. Wusstest du, dass man das Pascalsche Dreieck in Italien nach ihm benennt, also Tartaglia-Dreieck?

Werner: Bevor du mir sagst wie dieses Dreieck in Italien bezeichnet wird, musst du mir erstmal erklären, was das Pascalsche Dreieck ist!

Das Pascalsche Dreieck

Das **Pascalsche Dreieck** (benannt nach Blaise Pascal, 1623-1662, Mathematiker) ist eine unendliche dreieckige Anordnung ganzer Zahlen, die wie die *Fibonacci-Zahlen* einem einfachen Bildungsgesetz unterliegen, jedoch weitreichende mathematische Eigenschaften besitzen.

Hier zu sehen sind die ersten sechs Reihen des Pascalschen Dreiecks. Für eine beliebige Stelle im Dreieck (z.B. die Stelle einer der Zehner) erhält man die dazugehörige Zahl, indem man die beiden Zahlen darüber (4 und 6 bzw. 6 und 4) miteinander addiert, wobei für die Randpositionen der „leere Raum“ um das Dreieck als mit der Zahl Null besetzt gesehen werden kann, sodass der Rand immer mit der Zahl Eins besetzt ist. Mit der Eins an der Spitze fängt die Konstruktion an. Mit diesem Bildungsgesetz lässt sich das Pascalsche Dreieck nun beliebig weit nach unten fortsetzen.



Die erste, nicht allzu offensichtliche, jedoch wichtigste Eigenschaft des Pascalschen Dreiecks ist, dass die Zahlen einer Reihe n (wobei bei 0 das Zählen angefangen wird) den Koeffizienten (Faktoren der einzelnen Summanden) der Erweiterung der binomischen Formel $(a+b)^n$ entsprechen. Nehmen wir zum Beispiel die binomische Formel $(a+b)^3$. Erweitern wir diese Formel zunächst konventionell:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= [(a+b)(a+b)](a+b) \\ &= (a^2 + ab + b^2 + ba)(a+b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) \\ &= a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\ &= 1a^3b^0 + 3a^2b + 3ab^2 + 1a^0b^3\end{aligned}$$

An der letzten Zeile können wir nun erkennen, dass die Koeffizienten den Zahlen der dritten (ab Null gezählten) Reihe entsprechen. Auch können wir erkennen, dass die Potenzen von a und b von rechts nach links in jedem Summanden um eins absinken (für a) bzw. um eins ansteigen (für b), anfangend bzw. aufhörend mit 3, dem ursprünglichen Exponenten der binomischen Formel.

Weitere Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks ergeben sich, wenn man die Werte der Zahlen in den einzelnen Reihen oder Diagonalen betrachtet.

Wenn man zum Beispiel die Zahlen einer Reihe summiert, so ergibt sich immer eine Potenz von zwei; um genau zu sein die n -te Potenz, wobei n die (ab Null gezählte) soeben summierte Reihe ist.

Reinhold und Werner sind in einer Bank, weil Reinhold ein paar Souvenirs einkaufen möchte und Geld abheben muss. Da entdeckt Werner ein Plakat mit einem Kreisdiagramm darauf.

Reinhold: He schau mal!

Dieser Sektor ist etwa ein Drittel von dem anderen da.

Werner: Ja stimmt. Du hast wohl Recht.

Reinhold: Was das wohl für ein Winkel ist?

Werner: Keine Ahnung.

Reinhold: Sag mal, gibt es eigentlich eine Methode einen Winkel zu dritteln? Dass man ihn halbieren kann, mithilfe der Winkelhalbierenden weiß ich schon. Wie sieht es mit dritteln aus? Geht das auch nur mithilfe eines Lineals und eines Zirkels?

Werner: Da du ja grad so neugierig bist, erzähl ich dir etwas darüber.

Reinhold: Alles klar. Auf geht's.

Dreiteilung des Winkels

In der Schule lernt man mithilfe eines Lineals und eines Zirkels einen beliebigen Winkel zu halbieren, indem man seine Winkelhalbierende konstruiert. Doch ist es auch möglich, einen beliebigen Winkel in drei gleich große Teile zu zerlegen? Und dies nur mithilfe eines Zirkels und eines Lineals, ohne es zu markieren. Dies ist eines der drei klassischen Probleme der antiken Mathematik. Es als gelöst, da es als unmöglich gilt. Der französische Mathematiker Évariste Galois schuf 1830 die Grundlagen dafür. Die Unmöglichkeit gilt jedoch für einen allgemeinen Winkel α . Ein Sonderfall, für den es eine Konstruktion gibt, wäre z.B. der rechte Winkel. Teilung des rechten Winkels:

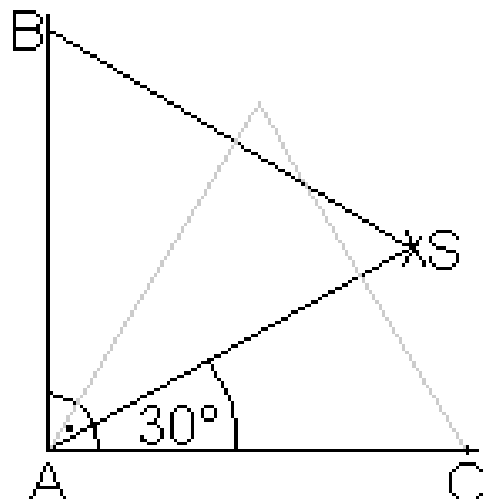
Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks über der Strecke AB.

Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks über der Strecke AC.

➔ Dreiteilung des rechten Winkels

Welche Winkel kann man aber nun in drei gleich große Teile zerteilen? Hier zunächst einmal ein Überblick über die Winkel, welche konstruiert werden können:

- Der rechte Winkel 90°
- Der Winkel 60° beim gleichseitigen Dreieck wie oben
- Das Fünfeck ist konstruierbar und hat das Grunddreieck $54^\circ-72^\circ-54^\circ$



Von diesen Winkeln kann man zu weiteren möglichen konstruierbaren Winkeln gelangen. Das Halbieren, das Verdoppeln, das Addieren und Subtrahieren kann durch Konstruktionen erreicht werden.

54°, 60°, 72°, 90° sind die vier Ausgangswinkel.
Halbiert man 60° zweimal, bekommt man 15°.
Halbiert man 72° zweimal, bekommt man 18°.

Die Differenz $18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ ist somit ein konstruierbarer Winkel. Somit sind auch alle seine Vielfachen konstruierbar (3°, 6°, 9°, ..., 87°, 90°). Bildet man diese Winkel mit dreifacher Winkelgröße gelangt man zu denjenigen Winkeln, die dreigeteilt werden können. Dies wären dann die Winkel 9°, 18°, 27°, 36°, 45°, 54°, 63°, 72°, 81° und wie gehabt 90°.

III Eine mathematastische Urlaubsreise

Es war ein wunderschöner Tag, ein Dienstag, in Atlantis. Willi, die Seegurke hatte sich schon das ganze Jahr auf diesen Tag gefreut. Heute würde er losgehen, der lang ersehnte Jahresurlaub. Die harte Arbeit hatte Willi in den letzten Wochen geschafft. Umso besser, dass nun ein Entspannungs- und Erholungsprogramm mit der Qualle Isabelle bevorstand, Willis bester Freundin.

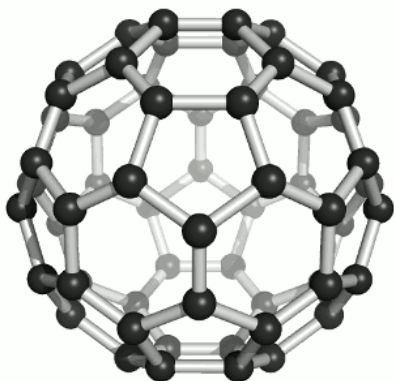
Und da kam sie auch schon. Nach einer langen und innigen Umarmung stieg Willi in Isabelles Boot ein und die beiden fuhren los in eine Reise, die sie nicht so schnell vergessen sollten.

„Hast du an alles gedacht, Willi?“

„Klar Isabelle, ich habe alles dabei. Sogar an den Fußball habe ich dieses Jahr gedacht. Übrigens, da fällt mir eine interessante Geschichte zu der Form des Fußballs ein!“

Die Mathematik des Fußballs – die archimedischen Körper

„Der Ball ist rund und ein Spiel dauert 90 Minuten“ – Sepp Herberger



Ist dieser Satz richtig? Keineswegs, denn der traditionelle Fußball ist aus Fünf- und Sechsecken zusammengesetzt und somit mathematisch gesehen alles andere als rund. Insgesamt sind es 12 schwarze Fünfecke und 20 weiße Sechsecke, die man benötigt, um den abgebildeten Fußball herzustellen. Daraus ergibt sich, dass dieser sogar Ecken hat, nämlich 60 Stück. Derartige Körper nennt man Archimedische Körper, welche ähnlich definiert werden, wie die platonischen Körper, nämlich folgendermaßen: sie müssen konvex, also „nach außen gerichtet“ sein, aus regulären Vielecken bestehen und an jeder Ecke ein bestimmtes Bauprinzip verwirklichen. In diesem Fall lautet das Bauprinzip: zwei Sechsecke und ein Fünfeck, an jeder Ecke treffen also zwei Sechsecke und ein Fünfeck aufeinander.

Insgesamt gibt es 13 Körper, welchen diesen Bedingungen entsprechen, die Archimedischen Körper.

Doch zurück zum Fußball. Dieser ist also eigentlich ein Archimedischer Körper und damit nicht rund. Nur durch das Aufpumpen kommt es zu einer Abrundung des Balles, dessen Umfang etwa 68 bis 70 cm beträgt. Dies besagen zumindest die Bestimmungen des Fußball-Weltverbandes (FIFA). Da stellt sich die Frage: Was ist eigentlich der kleinste Fußball?



Unglaublich, aber wahr – der kleinste existierende Fußball hat einen Umfang von nur ca. 2 Nanometern. Er besteht aus ganzen 60 Atomen, die – sie ahnen es sicher schon – genauso angeordnet sind, wie die Ecken eines Fußballes. Sehen Sie sich das Molekül an: Es sieht einem Fußball zum Verwechseln ähnlich. Dieses Molekül wurde 1970 zum ersten Mal theoretisch vorhergesagt und wenig später auch experimentell nachgewiesen. 1996 ging der Nobelpreis für Chemie an Wissenschaftler, die sich mit der Erforschung dieses sogenannten Fulleren (umgangssprachlich als „Fußballmolekül“ bezeichnet) beschäftigten.

Doch müssen es immer archimedische Körper sein? Kann man nicht auch mit einfacheren Körpern Fußball spielen? Wie wäre es zum Beispiel mit einem Würfel? Sie denken, das funktioniert nicht? Schauen Sie sich den Fußball der Weltmeisterschaft 2006 doch einmal genauer an. Er besteht aus zwei verschiedenen Arten von Flächen, die einen haben eine schwarze Umrandung und sehen aus wie eine Schuhsohle, die anderen sind weiß und haben drei „Finger“. Stellen Sie sich vor, diese würden nun jeweils zu einem Punkt zusammenschrumpfen. Dann werden die „Schuhsohlen“ quadratisch und der entstehende Körper ist ein Würfel. Geometrisch gesehen ist der Fußball der WM 2006 also nichts anderes als ein Würfel. So viel zu dem einleitenden Zitat von Sepp Herberger, der Ball sei generell rund.

Endlich angekommen bezogen die beiden ihre Hotelzimmer. Sie übernachteten wieder einmal in einem der besten Hotels der Stadt, dem Lobster Exclusive. Willi konnte sich das eigentlich nicht leisten, aber dank seiner Sparsamkeit in den letzten Wochen und einiger Überstunden hatte er an allen Ecken etwas Geld zusammengekratzt.

„Kommst du, Willi? Ich habe Hunger.“

„Klar Isabelle, lass mich nur noch kurz den Artikel fertig lesen. Wirklich sehr interessant. Der Autor behauptet doch tatsächlich, es gäbe mehr als unendlich viele Zahlen!“

Wie groß ist die Unendlichkeit? – Wo Mathematik auf Philosophie trifft

„Zwei Dinge sind unendlich, das Universum und die menschliche Dummheit, aber bei dem Universum bin ich mir noch nicht ganz sicher.“ – Albert Einstein

Wenn das Universum unendlich groß ist, wie Einstein das vermutet, wie groß ist es dann? Und wie lange benötigt man, um an dessen Ende zu fliegen? Moment, an welches Ende? Wie groß ist sie eigentlich, diese Unendlichkeit?

In der heutigen Zeit glauben die meisten Astronomen daran, dass das Universum unendlich groß ist, dass es also niemals möglich sein wird, an dessen „Rand“ zu gelangen. Auch Philosophen haben sich lange mit dem Thema der Unendlichkeit auseinandergesetzt. Dort ist diese vor allem eine Bezeichnung für das Grenzenlose oder die Ewigkeit.

Das Verständnis der Unendlichkeit in der Mathematik hat Georg Cantor (1845-1918), ein deutscher Mathematiker, mit seiner „Mengenlehre“ geprägt. Er erkannte, dass es unendlich viele natürliche Zahlen (1, 2, 3, 4, ...) gibt und definierte: Die Menge der natürlichen Zahlen ist abzählbar unendlich, weil man sie „durchnummerieren“ kann. Diese wichtige Eigenschaft der natürlichen Zahlen kann man auch anders ausdrücken: Man kann alle natürlichen Zahlen in eine unendliche Reihe schreiben.

Wiederum per Definition sind alle Mengen, deren Elemente man, wie die natürlichen Zahlen in eine Reihe schreiben und dann „durchnummerieren“ kann, auch abzählbar unendlich. Solch eine eindeutige Zuordnung wie das Durchnummerieren (dieses ist nichts anderes als ein eindeutiges Zuordnen von natürlichen Zahlen zu den Elementen der anderen Menge) nennt man Bijektion.

Cantor fragte sich bald, und das mag jetzt etwas absurd klingen, ob es nicht weitere Zahlenmengen mit noch mehr Elementen gibt. Es lag nahe, die Menge der Rationalen Zahlen zu betrachten, also alle positiven Brüche. Cantor ordnete diese in einer Tabelle so an, dass, ausgehend von $\frac{1}{1}$, in jeder neuen Zeile der Zähler und in jeder neuen Spalte der Nenner jeweils um 1 erhöht wird.

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	...
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	...
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	...
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	...
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	...
$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	...
$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Er wollte nun beweisen, dass auch diese Menge abzählbar unendlich ist. Dazu musste er eine Anweisung finden, mit deren Hilfe man alle Brüche in eine Reihe schreiben kann. Diese nennt man das „erste Cantor’sche Diagonalverfahren“. Er folgte dazu stets den eingezeichneten Pfeilen und erhielt daraus eine Reihe, welche man durchnummerieren kann:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \dots$$

Das Ergebnis ist erstaunlich: Die rationalen Zahlen sind also auch abzählbar unendlich, damit gibt es genauso viele rationale Zahlen (positive Brüche), wie natürliche Zahlen.

Aber gilt dies auch für die reellen Zahlen, also alle Zahlen, die auf einer Zahlengeraden zu finden sind? Betrachten wir alle Zahlen auf der Zahlengeraden zwischen 0 und 1. Cantor schlägt vor, alle Zahlen aus diesem Intervall in eine (fiktive) Liste zu schreiben und damit zu beweisen, dass die reellen Zahlen auch abzählbar unendlich sind. Dabei soll es egal sein, welche der Zahlen an welcher Stelle in der Liste steht. Eine solche Liste könnte dann folgendermaßen aussehen:

~~0,03652178999582033 ...~~
~~0,48284365830122447 ...~~
~~0,12589763200021477 ...~~
~~0,33335580000001447 ...~~
~~0,28011995129371512 ...~~
~~0,58942235578121598 ...~~
~~...~~

Als Test auf Vollständigkeit bildet Cantor nun eine Zahl aus der Diagonalen (vgl. Pfeil) dieser Liste, für diese neue Zahl übernimmt er also jeweils die n-te Nachkommastelle der n-ten Zahl aus der Liste. In diesem Beispielsfall ergibt sich 0,085312 ...

Er addiert nun zu jeder Ziffer dieser Zahl den Wert 1. Hier würde die Zahl 0,196423 ... entstehen.

Und jetzt kommt’s: Diese neue Zahl (0,196423...) unterscheidet sich nun von jeder Zahl der Liste an mindestens einer Nachkommastelle (denn es wurde ja jede Ziffer, die von je einer

Zahl der Liste übernommen wurde, um den Wert 1 erhöht, also verändert). Das widerspricht jedoch der Annahme, dass in der Liste alle reellen Zahlen vorkommen, die zwischen 0 und 1 liegen. Die Menge der reellen Zahlen lässt sich also überhaupt nicht in eine Reihe schreiben und somit nicht durchnummerieren, sie ist überabzählbar unendlich und somit „unendlich“ als die Menge der natürlichen oder der rationalen Zahlen.

Für diese entscheidende Erkenntnis für die spätere Mathematik erntete Cantor jedoch viele missbilligende Töne. Der große deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß sagte: "So protestiere ich gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer vollendeten, welche in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon de parler¹."

Dennoch sollte Georg Cantor Recht behalten, die Mengenlehre bildet heute das Fundament der Mathematik.

¹ bestimmte Art zu reden

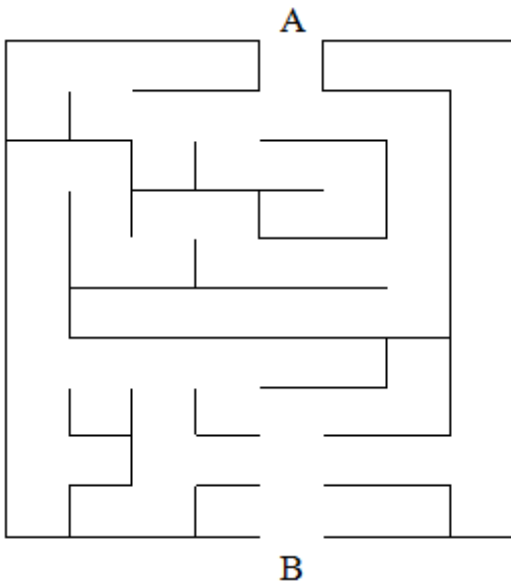
Ein langer, aber wunderschöner Abend neigte sich dem Ende zu. Willi und Isabelle waren gerade im Restaurant aufgestanden. Isabelle hatte wieder einmal 20 Meertaler Trinkgeld gegeben. Für sie als Unternehmerin war das nicht viel Geld, für Willi aber mehr, als er an einem Tag verdiente. Neben ihr fühlte er sich immer so klein und schwach.

„Was ist denn los Willi? Irgendetwas stimmt doch mit dir nicht. Oder war es nur die lange Fahrt? Ich bin jedenfalls platt. Wir sehen uns morgen zum Frühstück. Ist halb 10 in Ordnung? Auf jeden Fall freue ich mich schon riesig auf unseren Ausflug ins Seeganglabyrinth! Schlaf gut.“

Labyrinth und Irrgärten ...

... für Entdecker

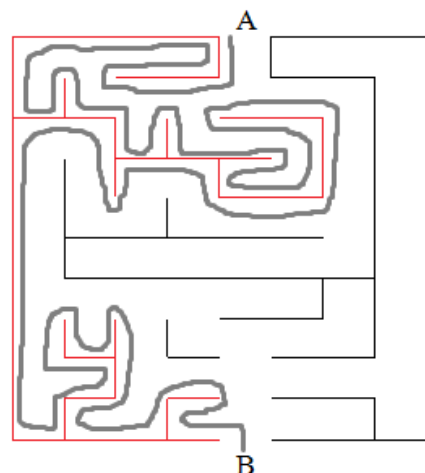
Sicherlich waren Sie schon einmal in einem Labyrinth. Doch haben Sie auch wieder herausgefunden? Testen Sie sich doch selbst, indem Sie einen möglichst kurzen Weg von A nach B finden.

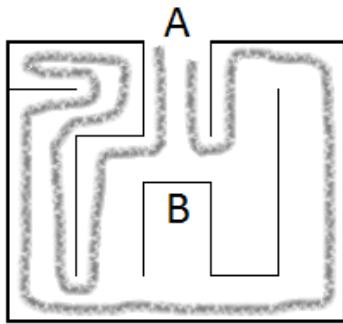


Vermutlich haben Sie gerade einfach eine Linie gezeichnet, bis Sie in einer Sackgasse ankamen. Dort haben Sie den Stift abgesetzt und von der vorherigen Kreuzung eine andere Lösung verfolgt. Nun stellen Sie sich aber vor, Sie wären in dem Labyrinth und müssten wieder herausfinden. Einfach absetzen und bei einer anderen Abzweigung wieder anfangen ist hier nicht möglich und ein einfaches Zurücklaufen gestaltet sich auch schwierig, es sei denn, Sie haben einen überdurchschnittlich gut ausgeprägten Orientierungssinn.

Um aus einem Labyrinth zu entkommen, muss man sich anderer Tricks und Methoden bedienen. Eine Möglichkeit, den Weg aus einem Labyrinth zu finden, ist die Rechte-Hand-Regel. Sie besagt, dass die rechte Hand immer an der Wand geführt werden muss.

Hier sieht man den Weg (grau), durch das Labyrinth, wenn man der rechten-Hand-Regel folgt, sodass man





stets eine Wand (rot) neben sich hat. Analog könnte man auch eine Linke-Hand-Regel formulieren, welche auch zielführend wäre.

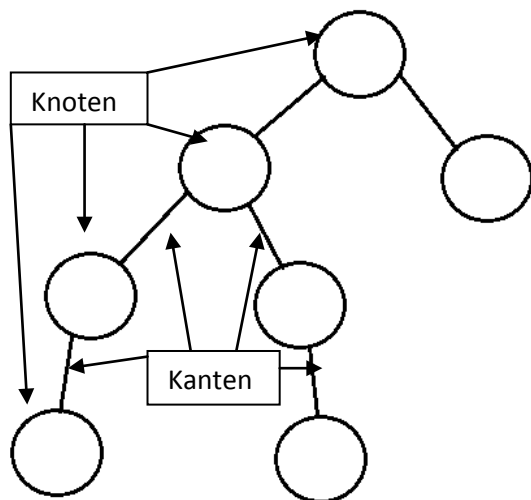
Jedoch kommt man nicht immer zum Ziel, wenn man der Rechten-Hand-Regel folgt, wie man in dem nebenstehenden Bild sieht.

Doch auch für solche Fälle gibt es Methoden, die zum Ziel führen. Wenn man etwas Kreide dabei hat, könnte man beispielsweise den Algorithmus von Trémaux anwenden. Jedes Mal, wenn man an eine Kreuzung kommt, entscheidet man sich für einen Weg, markiert aber die Richtung, aus der man kommt und in die man geht. Erreicht man dann eine bereits markierte Kreuzung, so wählt man möglichst einen noch nicht markierten Weg. Ist dies nicht möglich, so wählt man einen bereits markierten Weg und markiert diesen noch einmal. Mehr als zweimal muss man einen Weg nicht gehen.

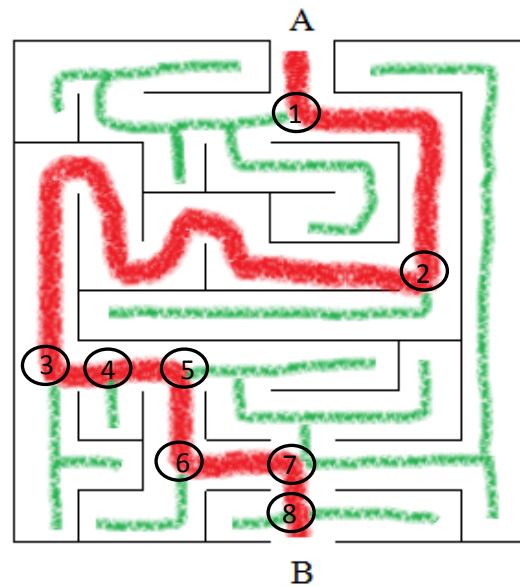
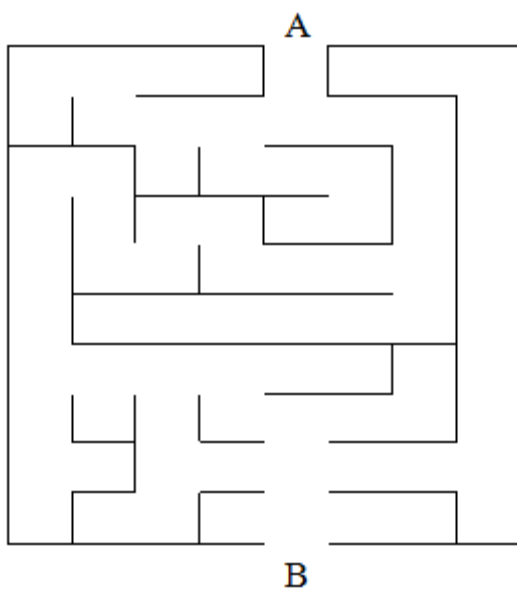
Dieser Algorithmus, der immer zum Ziel führt, beruht auf der Tiefensuche in der Graphentheorie, denn ein Labyrinth kann man mathematisch auch durch einen Graphen ausdrücken.

... für Konstrukteure

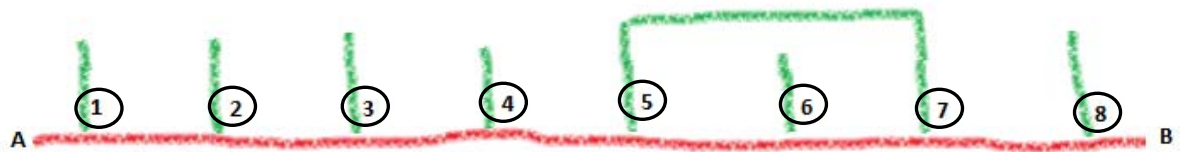
Graphen bestehen aus Knoten und Verbindungen zwischen den Knoten, welche Kanten genannt werden. In der untenstehenden Abbildung ist ein Graph dargestellt.



Ein weiteres, alltägliches Beispiel für Graphen sind U-Bahnpläne, wobei die Stationen die Knoten im Graphen und die Bahnlinien die Kanten darstellen. Möchte man nun einen Irrgarten als Graphen darstellen, so zeichnet man alle möglichen Wege in den Irrgarten ein. Die Abzweigungen zwischen den Wegen stellen dann die Knoten des Graphen dar. Sie kennen bereits den Weg durch das Labyrinth, zeichnen Sie nun in die nächste Abbildung den Labyrinthgraphen ein, den Weg zum Ziel möglichst in einer anderen Farbe. Decken Sie dabei die Lösung (rechts) ab. Nummerieren Sie die Abzweigungen von der Hauptroute.



Diesen Labyrinthgraphen könnte man nun vereinfachen, indem man den Weg zum Ziel „streckt“ und Sackgassen als kurze Abbiegungen andeutet.



Daran kann man sehen, dass zwischen den Kreuzungen 5 und 7 eine weitere Verbindung besteht, man sagt, der Labyrinthgraph besitzt einen Kreis.

Gibt es in einem Graphen zwischen zwei beliebigen Punkten nur einen Weg, so nennt man diesen Graphen Baum. Besitzt ein Graph jedoch (wie hier) einen geschlossenen Kantenweg, so nennt man diesen einen Kreis.

„Es war wirklich ein wunderschöner Tag, Isabelle. Vielen Dank dafür.“

„Ach Willi, du Charmeur. Ohne dich hätte ich doch aus dem großen Labyrinth nie wieder herausgefunden. Vielen Dank noch einmal dafür!“

„Dafür doch nicht. War doch selbstverständlich. Übrigens: Hast du von dem neuen Großprojekt gehört? Ein paar Wale wollen messen, wie groß die Erde ist!“

„Wie wollen sie denn das anstellen?“

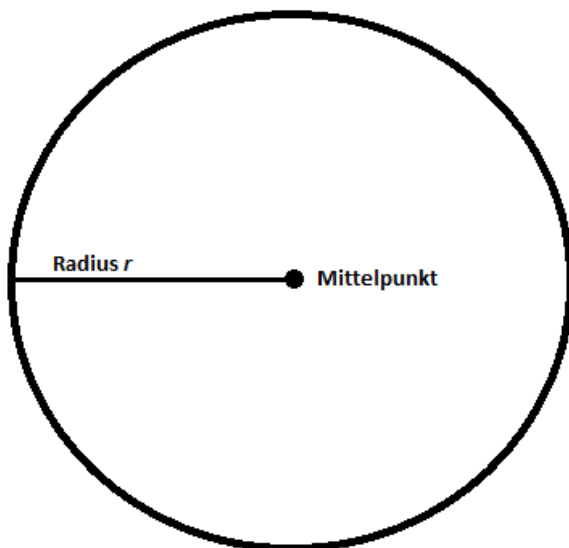
„Sie wollen eine Kette bilden, sodass sie überall einen Meter aus dem Wasser heraus schauen. Dann wollen sie ein Seil nehmen, es einmal um die Erde über ihre Rücken spannen und die Länge messen.“

„Dann ist das Seil doch viel länger als der Umfang, den sie messen wollen, oder nicht?“

„Ja, da hast du wohl Recht Isabelle, das weiß ich auch nicht genau.“

Die Vermessung der Erde

Was glauben Sie? Wie viele Meter Seil benötigt man mehr, wenn man das Seil überall auf der Erde 1 m anheben möchte? Schätzen Sie!



Die Lösung zu diesem Problem ist relativ einfach. Das Seil ist so lange wie der Umfang der Erde. Nehmen wir an, dass der Erdradius 6400 km beträgt, so kommen wir auf einen Erdumfang von ca. 40.000 km. Dies lässt sich mit der Formel für den Umfang eines Kreises leicht berechnen. Darin ist der Umfang U eines Kreises $U = 2 * \pi * r$ mit dem Radius r und der Kreiszahl π ($\approx 3,14$).

Hebt man nun das Seil überall um 1 m, so vergrößert man den Radius dieses Kreises um 1 m. Die Länge des dafür benötigten Seiles lässt sich durch eine einfache Termumformung berechnen.

Der neue Umfang U^* ist

$$U^* = 2\pi * (r + 1)$$

$$= 2\pi r + 2\pi$$

$$\approx 2\pi r + 6,28$$

$$= U + 6,28,$$

also nur ca. 6,28 m länger, als der ursprüngliche Umfang. Das bedeutet, dass die Wale nur ein ca. 6,28 m längeres Seil verwenden müssen, um dieses 1 m über der Erdoberfläche zu spannen. Unglaublich, oder?

Noch erstaunlicher ist, dass dies nicht nur für die Erde gilt, sondern für jede beliebige Kugel, denn die Herleitung lässt sich auf jeden beliebigen Radius anwenden, wir haben in die Rechnung oben gar nicht den Erdradius eingesetzt.

Diese Aussage ist so unglaublich, dass eine Ameisenkolonie sich dagegen wehrt, sie anzuerkennen. Die Königin bittet die intelligenteste der Ameisen, ein Experiment vorzubereiten, mit welchem die Aussagen der Wale widerlegt werden können. Die schlaue Ameise ist gerissen und überlegt sich, das Experiment anders herum durchzuführen. Sie legt einen Faden um eine Orange und verlängert diesen um 6,28 m. Wie weit ist dieser Faden jetzt von der Orange entfernt? Falls er überall den Abstand 1 m von der Orange hat, so hätten die Wale Recht behalten. Die intelligente Ameise misst und – stellt fest, dass die Wale Recht hatten. Der Abstand beträgt tatsächlich überall 1 m.

Wie lässt sich das erklären?

Der neue Umfang U^* des Fadens ist $U^* = 2\pi * r^*$ mit dem neuen Radius r^* .

Durch Verlängerung des Fadens mit der Länge U (= Umfang der Orange) wird der neue Umfang $U^* = 2\pi * r^* = U + 6,28$.

Setzt man nun für den Umfang $U = 2 * \pi * r$ ein, so erhält man:

$$2\pi * r^* = 2\pi * r + 6,28$$

$$2\pi * (r^* - r) = 6,28$$

$$r^* - r \approx 1$$

$$r^* = r + 1$$

Der Radius des Kreises, den der Faden bildet, ist also 1 m größer, als der Radius der Orange.

Somit ist es egal, wie groß der Radius der Kugel ist, den man um 1 m verlängert: der Umfang wird stets um $2\pi \text{ m} \approx 6,28 \text{ m}$ zunehmen, denn es sind im Kreis – mathematisch gesprochen – Radius und Umfang direkt proportional zueinander.

Sie glauben das nicht? Messen Sie nach!

Am späten Abend kamen Willi und Isabelle wieder im Hotel an. Es war wirklich ein wundervoller Tag gewesen, da waren sich beide einig. Willi hatte Isabelle nicht nur sicher aus dem Labyrinth geleitet, sondern sie danach auch noch auf ein heißes Tässchen Argentee eingeladen. Der hatte ihr so gut geschmeckt, dass sie Willi dafür direkt einen dicken Schmatzer auf die Backe gegeben hat.

Gerade kamen Willi und Isabelle am Kinderhort im Hotel vorbei.

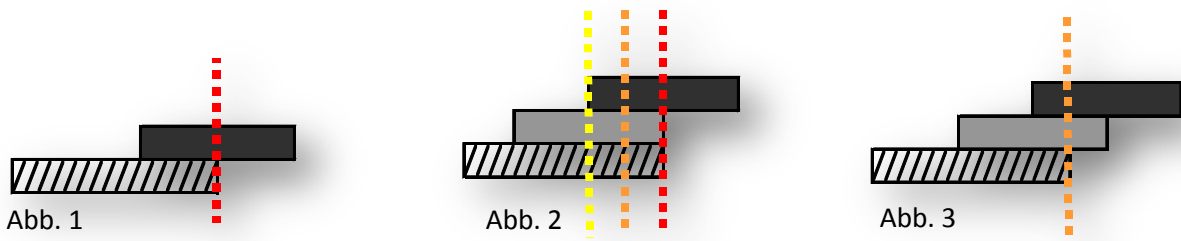
„Ach nein, schau mal Willi! Das habe ich früher auch immer gemacht!“

„Was? Mit Bauklötzchen gespielt?“

„Ja, meine Geschwister und ich wollten immer einen möglichst großen Überhang bauen. Wir haben sogar richtige Wettbewerbe veranstaltet!“

Der Klötzchenstapel des Quallenbabys

Ein Klötzchenstapel, bei dem die Klötzchen nur über- und nicht nebeneinander liegen dürfen, ist nur dann stabil, wenn sein Schwerpunkt über dem Tisch oder genau über der Tischkante liegt. Hat man nur ein Klötzchen, so ist dessen Schwerpunkt in der Mitte des Klötzchens. Um maximalen Überhang zu erreichen, muss es mittig an der Tischkante liegen (Abb. 1). Bei dem nächsten Klötzchen geht man folgendermaßen vor: Da bereits bekannt ist, dass das erste Klötzchen eine halbe Länge über der Tischkante liegen muss, hebt man nun das erste Klötzchen an und legt das zweite Klötzchen unter das Erste (Abb. 2). Das zweite Klötzchen wird dadurch zur neuen „Tischkante“ für das Erste.



Man kann dieses Klötzchensystem nun wiederum bis an seinen Massenmittelpunkt über die Tischkante schieben (Abb. 3). Dieser wird bestimmt, indem man die Senkrechten der Schwerpunkte zeichnet (gestrichelte Linien). Der Schwerpunkt des Zwei-Klötzchen-Systems (orange Linie) liegt mittig zu den Schwerpunkten des ersten (rote Linie) und des zweiten Klötzchens (gelbe Linie).

Will man noch ein Klötzchen hinzufügen, so geht man wieder analog vor, jetzt zeichnet man jedoch die Senkrechten der Massenmittelpunkte einerseits des dritten Klötzchens (grüne Linie) und andererseits des 2-Klötzchen-Systems (orange Linie). Die Senkrechte durch den gemeinsamen Massenmittelpunkt (goldene Linie) ist jetzt nicht die Mitte der beiden, weil ein

Massenmittelpunkt „doppelt so viel wert“, da aus zwei Klötzchen zusammengesetzt, ist. Daher muss man die Strecke dritteln (Abb. 4).

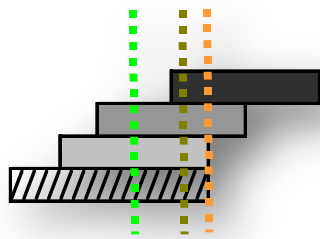


Abb. 4

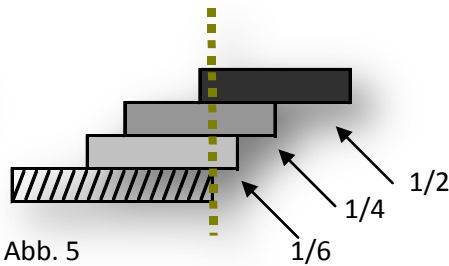


Abb. 5

Betrachtet man das Problem genauer, so fällt auf, dass die hinzukommenden Abstände mit Erhöhung der Anzahl der Klötzchen folgende sind (angenommen, die Klötze haben die Länge 1):

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

Klammert man $\frac{1}{2}$ aus, so erhält man:

$$\frac{1}{2} * \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

Den zweiten Faktor nennt man harmonische Reihe. Diese Reihe ist bestimmt divergent, wird also unendlich groß, was schon 1689 von Jakob Bernoulli bewiesen wurde. Den Begriff der Divergenz kann man an dem folgenden Beispiel leicht nachvollziehen. Betrachtet man die harmonische Reihe

$$\underbrace{1}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32} + \dots}_{>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}} + \dots$$

so ist jede der Summen über den geschweiften Klammern größer als $\frac{1}{2}$, beispielsweise ist $\frac{1}{5} > \frac{1}{6} > \frac{1}{7} > \frac{1}{8}$, somit gilt $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Es werden unendlich viele dieser Summen addiert, welche jeweils $\geq \frac{1}{2}$ sind. Daher wächst die harmonische Reihe über alle Grenzen.

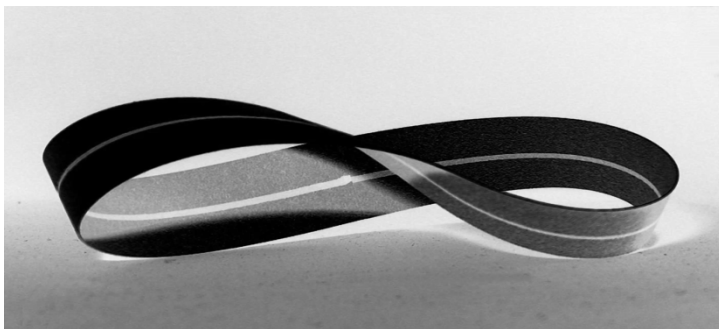
Man kann dementsprechend einen oben beschriebenen Klötzchenstapel theoretisch unendlich weit über einen Tisch hinausbauen. Wie weit kommen Sie?

„Wir haben früher auch immer viel gespielt. Meine Schwester und ich haben oft Figuren gefaltet. Sie konnte immer wundervolle Krokodile aus Seetang basteln. Unsere Eltern haben sich immer riesig gefreut, wenn wir ihnen eines geschenkt haben.“

„Ein Künstler bist du also auch, Willi. Ich hatte ja keine Ahnung, welche ungeahnten Fähigkeiten in dir stecken. Habt ihr auch immer diese Bänder gebastelt, die kein Ende haben? Wie hießen die noch gleich?“

Das Möbiusband, eine äußerst nützliche Struktur

Unser Freund, die kleine Qualle Isabelle macht in ihren jungen Jahren eine Entdeckung. Sie sieht er eine ihr unbekannte Struktur und geht auf diese zu. Als sie auf ihr entlang geht bemerkt die junge Isabelle, dass sie sich auf einmal der anderen Seite der merkwürdigen Struktur befindet. Nachdem sie eine weitere Runde gedreht hat, stellt sie erstaunt fest, dass sie wieder dort angekommen war, wo sie ganz am Anfang gestartet ist. Deshalb fragt sie sich jetzt, wie das sein kann und ob es noch ähnliche Strukturen gibt bei denen das auch möglich ist. Nun es gibt viele solcher Formen, aber der bekannteste Vertreter davon ist das Möbiusband:



Möbiusband

Diese Strukturen besitzen eine nicht orientierbare Fläche, das heißt, man kann nicht zwischen oben und unten sowie innen und außen unterscheiden. Das Möbiusband wurde vom deutschen Mathematiker August Ferdinand Möbius entdeckt und es ist auch einfach herzustellen. Man nimmt einen langen Papierstreifen und dreht ein Ende um 180° . Danach klebt man die beiden Enden aufeinander und fertig ist ein Möbiusband. Wenn man nun mit einem Stift eine Linie auf dem Band zeichnen will stellt man das gleiche fest wie die kleine Amöbe Willi, man hat die Linie auf beide „Seiten“ gezeichnet und nicht nur auf einer. Interessant ist auch die Tatsache, dass wenn man das Möbiusband entlang seiner Mittellinie zerschneidet entsteht ein doppelt so langes Band und wenn man es drittelt entstehen zwei in sich verschlungene Bänder von denen eins wiederum ein Möbiusband ist. Man kann auch immer kleinere Einteilungen wählen und man stößt auf ein ähnliches Ergebnis wie bei einer anderen Einteilung. Allgemein kann man sagen:

n = Abschnitte, in die das Band unterteilt wurde

r = die Anzahl der entstehenden Ringe

wenn n gerade: $n = 2 * r$; wenn n ungerade: $n = 2 * r + 1$

das +1 steht für ein zusätzliches Möbiusband

Wenn man beispielsweise das Band in vier Abschnitte einteilt erhält man:

$$4 = 2 * r$$

$$r = \frac{4}{2}$$

$$r = 2$$

Man erhält 2 in sich verschlungene und verdrillte Ringe. Verwendung im Alltag findet das Möbiusband unter anderem bei Riemenmotoren, wo es als Leistungsübertragungsmittel fungiert, da es gleichmäßig abgenutzt wird.

Jetzt verstehen sie sicherlich auch folgenden Mathematikerwitz:

Was ist groß, grau, nicht orientierbar und schwimmt im Meer?

- Möbius Dick

Isabelle und Willi ließen den Tag bei einem Rotalgenwein in romantischem Kerzenlicht ausklingen. Sie waren beide glücklich, so gute Freunde zu sein.

„Willi, weißt du was? Du bist wirklich mein bester Freund!“

„Danke Isabelle, du bist auch meine beste Freundin! Ich weiß gar nicht, was ich ohne dich machen würde. Erst gestern habe ich wieder eine Statistik gelesen, wie viel Rassendiskriminierung es doch gibt. Ich bin froh, dass das bei uns nicht so ist.“

Simpson'sches Paradoxon - Statistiken können lügen

Beim Simpson'schen Paradoxon handelt es sich um ein Missverständnis von statistischen Aussagen, bei denen diese Aussagen oft das Gegenteil darstellen, als das, was sie ursprünglich aussagen sollten.

Ein Beispiel aus der New York Times vom 11. März 1979:

Hautfarbe des Angeklagten	Todesurteil Ja/Nein	Quote
schwarz	59/2448	2,4
weiß	72/2158	3,4

Man könnte also denken, dass keine Rassendiskriminierung vorliegt. Wenn man die Statistik aber noch erweitert mit dem Opfer der Verbrechen, kommt man auf folgende Statistik, die dann doch etwas verblüffend ist.

Hautfarbe des Angeklagten/Opfers	Todesurteil Ja/Nein	Quote
schwarz/schwarz	11/2209	0,5
schwarz/weiß	48/239	16,7
weiß/schwarz	0/111	0
weiß/weiß	72/2047	3,4

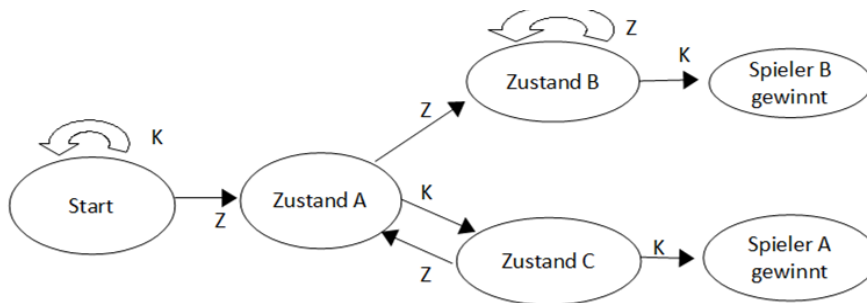
Man stellt nun fest, wenn man sich die Statistik genau durchliest, dass bei einem weißen Opfer und schwarzem Täter die Verurteilungsrate sehr groß ist und dass bei einem weißen Angeklagten und einem schwarzen Opfer die gesprochenen Todesurteile gleich null sind. Bei weißen Opfern und weißen Tätern ist die Rate der Verurteilungen auch höher als bei schwarzen Tätern und schwarzen Opfern. Generell kann man also sagen, dass bei einem

weißen Opfer deutlich häufiger die Todesstrafe gesprochen wird, als bei einem schwarzen Opfer und das schwarze Personen auch härter bestraft werden als weiße Leute. Man stellt also fest, dass doch eine Rassendiskriminierung bei der Häufigkeit der Todesurteile vorliegt. Dies ist nur eins von vielen Beispielen bei denen die ursprüngliche Statistik nicht die Realität widerspiegelt, sondern eine falsche Wirklichkeit veranschaulicht.

Spät am Abend gingen die beiden auf ihr Zimmer und kuschelten sich in ihre Decken. Willi schlief sofort ein. Doch die sanfte Ruhe währte nur kurz. Schon bald wurde er von einem Alptraum heimgesucht.

Triell - Was ist die beste Möglichkeit?

Stellen wir uns vor, wir befänden uns in einem Triell, der Erweiterung des Duells, wo nicht zwei sondern drei Personen um ihr Leben kämpfen. Jeder besitzt einen Revolver mit so vielen Patronen wie benötigt werden. Einer der Kontrahenten, Willi besitzt eine Trefferwahrscheinlichkeit von 33%, d.h., er trifft nur bei jedem dritten Schuss. Isabelle hat eine Trefferquote von 66% und der letzte, namens Herbert trifft mit jedem Schuss, also eine Trefferwahrscheinlichkeit von 100%. Aus Gründen der Fairness darf der schlechteste, also Willi anfangen. Danach kommt Isabelle und zum Schluss der beste der drei Schützen, Herbert. Stellen wir uns nun vor wir wären Willi, der mit der geringsten Trefferrate, auf wen sollten wir zuerst schießen?

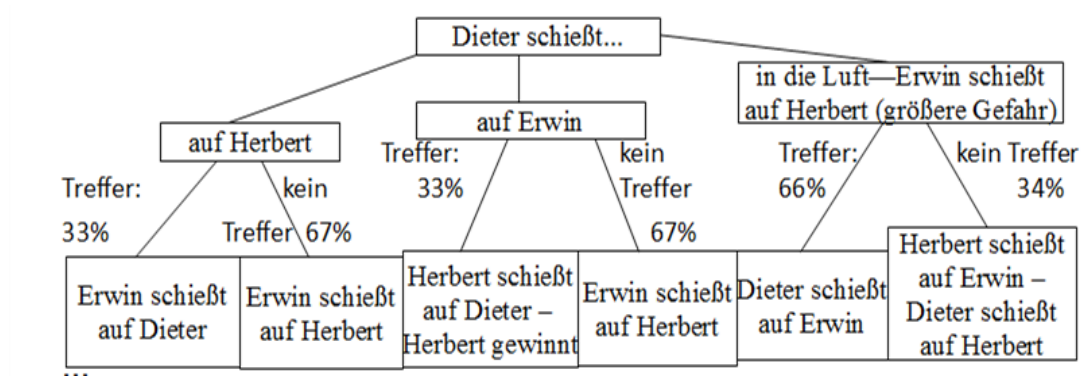


Spielen wir die verschiedenen Möglichkeiten mal durch: Wenn wir zuerst auf Isabelle schießen und treffen sollten, so wäre danach Herbert am Zug, da Isabelle schon weg wäre und das wiederum wäre schlecht für uns, da wir das einzige übrige Ziel wären und Herbert mit jedem Schuss trifft, wir also keine Chance hätten zu überleben.

Eine andere Möglichkeit wäre zuerst auf Herbert zu schießen, da er die größte Trefferwahrscheinlichkeit besitzt. Sollten wir treffen, wäre Willi das einzig mögliche Ziel für Isabelle, der uns mit einer Wahrscheinlichkeit von 66% erschießen würde, dies bietet zwar eine Deutlich erhöhte Überlebenschance für uns, aber viel besser ist es trotzdem nicht.

Es gibt noch eine dritte Möglichkeit, die zuerst sehr absurd klingt, aber dennoch eine noch höhere Überlebenschance für uns bietet: Wir schießen in die Luft. Total verrückt werden sich die meisten jetzt denken, spielen wir es aber mal durch: nachdem wir in die Luft geschossen haben, ist Isabelle dran, welcher natürlich auf Herbert schießt, er ist schließlich der beste Schütze. Sollte Isabelle treffen wären wir wieder am Zug und es wäre nur noch er als Ziel möglich und sollte er nicht treffen, so würde Herbert auf Isabelle zielen, da er für ihn die größte Gefahr darstellt und da er immer trifft, würde nur noch er uns gegenüber stehen und wir wären auch in diesem Fall wieder am Zug. Es ist also fast egal, wer von beiden den anderen trifft am Ende wären wir wieder an der Reihe mit dem Schießen, was sich deutlich positiv

auf unsere Überlebensquote auswirkt. Mathematiker haben dies auch nachgeprüft und sind darauf gekommen, dass die Wahrscheinlichkeit zu Überleben nach dieser Strategie 40% beträgt.



In diesem Diagramm sieht man, dass die letzte Möglichkeit die Einzige ist, bei der nicht die Möglichkeit besteht, dass Willi als Ziel gewählt wird, was die Überlebenschance erhöht.

Schweißgebadet wachte Willi mitten in der Nacht auf.

„Auf Isabelle schießen? Niemals würde ich auf meine beste Freundin schießen.“

Er beschloss, vor dem Einschlafen noch einigen Zeilen zu lesen. Sein neues Buch „Neulich in der Thunfischdose“ war der aktuelle Bestseller. Es begann folgendermaßen:

„Verdammt ist das eng hier!“

„Ja, so habe ich mir das hier auch nicht vorgestellt.“

„Diese Enge scheint den Beiden dort drüben aber nichts auszumachen, so ausgelassen wie die sich unterhalten.“

„Sie haben nur festgestellt, dass sie heute beide Geburtstag haben.“

„Tatsächlich? So ein Zufall!“

„Nein eigentlich nicht, wenn man bedenkt, dass wir hier mindestens 25 Thunfische sind.“

„Na und? Ein Jahr hat doch schließlich 365 Tage.“

„Du Rechnest einfach falsch.“

Und schon war Willi eingeschlafen.

Das Geburtstagsparadoxon

Das Geburtstagsproblem, welches auf Grund seines verblüffenden Ergebnisses auch als Geburtstagsparadoxon bezeichnet wird, beschreibt die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen aus einer Gruppe am selben Tag im Jahr Geburtstag haben.

Zunächst wäre für einen mathematisch korrekten Lösungsansatz zu beachten, dass nach einem beliebigen Tag im Jahr gefragt wurde. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen an einem bestimmten Tag im Jahr Geburtstag haben ist deutlich geringer.

Der Einfachheit halber werden im Folgenden Schaltjahre vernachlässigt.

Die Anzahl aller möglichen Fälle eines Geburtstages (g) ist für n Personen $g = 365^n$, da alle Fälle eines Geburtstages für alle Personen gleich wahrscheinlich sind.

Von diesen möglichen Fällen beinhalten nur $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)$ unterschiedliche Geburtstage ($= u$). Für die erste Person kann der Geburtstag frei gewählt werden, für die zweite gibt es dann 364 Tage, an denen die erste nicht Geburtstag hat etc.

Somit ergibt sich laut der Laplace Formel

$$(P(A) = \frac{\text{Anzahl der Fälle, bei denen A eintritt}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}})$$

eine Wahrscheinlichkeit von $P = \frac{u}{g}$, dass alle n Personen an einem unterschiedlichem Tag Geburtstag haben.

Die Wahrscheinlichkeit eines doppelten Geburtstag während eines Jahres ist somit

$$P = 1 - \frac{u}{g} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

Daraus folgend liegt die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Gruppe bestehend aus fünf Personen zwei am selben Tag im Jahr Geburtstag haben bei ca. 2,71%. Jedoch bei einer Gruppe aus $n = 25$ Personen liegt sie schon bei ca. 56,87% und bei einer Versammlung von $n = 50$ Personen sogar bei ca. 97%.

Doch Willi wollte einfach nicht gut schlafen. Abermals hatte er einen Alptraum, diesmal aus seiner Kindheit.

Herr Hai: „So Willi Seegurke, das reicht! Die dritte Ermahnung in dieser Stunde, Nachsitzen!“

Willi Seegurke: „Oh Mann, nicht schon wieder! Da sitzt man immer stundenlang und rechnet und rechnet und rechnet!“

Herr Hai: „Tja, das hättest du dir wohl besser vorher überlegen sollen! Und wenn du nicht stundenlang sitzen möchtest, musst du einfach schneller rechnen oder du hast einen Geistesblitz wie einst Carl Friedrich Gauß.“

Willi Seegurke: „Carl wer?“

Herr Hai: „Daran erkennt man, wie du diese Stunde aufgepasst hast.“

Die Gauß'sche Summenformel

Unterricht ist nicht immer interessant und spannend. An solchen Tagen sieht manch einer dann nur gelangweilt aus dem Fenster oder auf seine Uhr. Jedoch manch anderer nutzt diese Gelegenheit und erfindet schnell mal eine mathematische Formel. Klingt unrealistisch? Dies ist jedoch genau so passiert.

Der neunjährige Carl Friedrich Gauß sitzt im Mathematikunterricht. Der Lehrer stellt seinen Schülern die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Alle Schüler beginnen angestrengt zu rechnen: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 \dots$ Nur nicht der junge Schüler Gauß, denn dieser überlegt nur ein paar Augenblicke und nennt schließlich die Lösung: 5050

Denn der Schüler bildet aus der niedrigsten und höchsten Zahl ein Paar:

$1 + 100 = 101$, ebenso aus der zweitniedrigsten und aus der zweithöchsten Zahl:

$2 + 99 = 101$. Gauß bildet nun weiter Zahlenpaare bis er alle Ziffern von 1 bis 100 aufgebraucht hat. Sein letztes Paar, das er bilden kann ist $50 + 51 = 101$. Er hat nun 50 Paare und alle ergeben 101. Dies lässt sich nun einfach rechnen:

$$50 \cdot 101 = 5050$$

Dieses Prinzip lässt sich veranschaulichen und verallgemeinern. Man schreibt die Zahlen von 1 bis n aufsteigend in eine Zeile. In der Zeile darunter in umgekehrter Reihenfolge (z.B. $n = 10$):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Die Summe aller Spalten der zwei Zeilen ergibt 11, allgemein ergibt sich also ein Wert von $n + 1$. Da es n Spalten gibt, ist die Summe aller Zahlen der zwei Zeilen $n \cdot (n + 1)$. Um nun die Summe der Zahlen einer Zeile zu erhalten muss das Ergebnis noch halbiert werden und es ergibt sich die allgemeine Formel :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{1}{2} * n * (n + 1)$$

Diese Formel steht heute als Gauß'sche Summenformel in den Mathematiklehrbüchern. Eine noch heute gelehrte Formel, entdeckt von einem Neunjährigen, der bei dieser Aufgabe schlauer war als sein Lehrer.

Am nächsten Morgen erzählte Willi Isabelle von den schrecklichen Alpträumen, die ihn in der vergangenen Nacht beschäftigt haben.

„Ach Willi, das ist ja schrecklich! Wenn ich daran denke, auf dich schießen zu müssen, gar nicht auszudenken.“

„Zum Glück sind wir an so einem sicheren Ort. In so einem großen Hotel fühle ich mich sehr sicher. Wie viele Zimmer gibt es hier eigentlich? Bestimmt unendlich viele, oder?“

„Aber Willi, es kann doch in einem Hotel nicht unendlich viele Zimmer geben!“

Hilberts Hotel

Hilberts Hotel ist ein mathematisches Gedankenspiel, welches von dem deutschen Mathematiker David Hilbert erdacht wurde, um zu zeigen, wie sehr sich doch die endlichen Mengen von den unendlichen unterscheiden.

Da das Gedankenspiel mit der Unendlichkeit arbeitet, erwartet Hilberts Hotel ein wenig abstraktes Denken.

Man stelle sich nun ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern vor. Diese sind mit den Zimmernummern von 1 bis Unendlich gekennzeichnet. Alle Zimmer sind ausgebucht. Nun kommt jedoch ein hoher Gast und möchte einchecken. Der Hotelier muss nun eine Lösung finden, den Gast unterzubringen, ohne jedoch einen anderen Gast aus dem Hotel zu vertreiben. Was könnte er nun tun?

Eine Vermutung wäre: Wenn unendlich viele Gäste im Hotel sind, sind alle Zimmer belegt. Die Lösung liegt jedoch auf der Hand, wenn man nur ein wenig mit der Unendlichkeit spielt:

Der neue Gast zieht in Zimmer Nummer 1, der Gast in diesem Zimmer zieht um in Zimmer 2, dieser Gast ins Zimmer 3, usw. Damit jetzt nicht jeder Gast sein Zimmer wechseln muss, könnte der Gast aus Zimmer 1 auch gleich ins Zimmer 10 und dieser von dort ins Zimmer 100. Führt man dieses Spiel nun weiter fort, kommt jeder Gast in einem Zimmer unter.

Der Hotelier möchte gerade nach der ganzen Grübelei eine Pause machen, als ein Bus mit unendlich vielen neuen Gästen ankommt.

Doch auch für eine unendliche Anzahl neuer Gäste gibt es eine Lösung:

Der Gast aus Zimmer 1 zieht um in Zimmer 2, dieser zieht ins Zimmer 4, der von Zimmer 3 zieht ins Zimmer 6, usw. Jeder muss also in das Zimmer, welches die doppelte Zahl seines alten Zimmers hat. Jemand aus Zimmer x zieht daher in das Zimmer $2x$. Damit sind nun also nur die Zimmer mit einer geraden Nummer vergeben. Alle Zimmer mit einer ungeraden Zahl sind jetzt daher frei. Da es in Hilberts Hotel unendlich viele Zimmer mit ungeraden Zimmernummern gibt, ist nun Platz für die unendlich neuen Gäste im Bus.

Der letzte Tag des Urlaubs war angebrochen. Die beiden Freunde beschlossen, an diesem Tag noch etwas ganz besonderes zu machen. Sie hatten von einer Kegelbahn in der Nähe gehört und schnell beschlossen, dort ihr Glück zu versuchen.

„Hast du schon einmal gekegelt, Willi?“

„Nein, Isabelle. Wir Seegurken sind eigentlich keine Kegelfans.“

Das „Banach-Tarski-Paradoxon“

Die Mathematik sollte absolut und logisch sein und dennoch gibt es Teilbereiche, welche so bizarr sind, dass sie sich dem allgemeinen Verständnis entziehen und sogar zu Ablehnung führen. So hat, als die Allgemeinheit von dem „Banach-Tarski-Paradoxon“ erfahren hat, ein darüber bestürzter und wütender Bürger den Staat Illinois dazu aufgefordert, dieses Theorem an deren Schulen zu verbieten.

(Addison, J.W. (1983) Obituary for Alfred Tarski. In California Monthly 94 (2), S. 28.)

Dieses berühmt-berüchtigte Theorem führten die polnischen Mathematiker Stefan Banach und Alfred Tarski 1924 in einem mathematischen Existenzbeweis erstmals durch.



Sie bewiesen, dass es in der Mathematik möglich ist eine Kugel in min. sechs Teile zu spalten und daraufhin diese Teile so wiederzusammen zu setzen, dass zwei vom Volumen und Gestalt zu dem Original identische Kugeln entstehen.

Dieses Paradoxon lässt jedermann vermutlich erst an einen Zauberer denken der aus einem roten Ball zwei macht. Jetzt sollte man nicht denken, dass dieser Schausteller in der Mathematik bewandert ist, denn eine Handlungsanweisung zu diesem Vorgang gibt es nicht und dieser Zaubertrick ist und bleibt auch reiner Schwindel.

So präsentiert dieses Theorem, dass das mathematische Modell des Raumes als Punktmenge in der Mathematik Aspekte hat, die sich in der physischen Realität nicht wiederfinden. In der Mathematik wurde das Problem damit gelöst, dass durch die Arbeit mit nicht messbaren Teilmengen (Auswahlaxiom) die Kugelteile dermaßen kompliziert geformt sein können, dass ihr Volumen nicht mehr definierbar ist. Diese nicht messbaren Punkt Mengen können unendlich porös bzw. staubwolkenförmig versinnbildlicht werden. Die Existenz solche Punkt Mengen ist natürlich in der physischen Realität nicht möglich und auch in der Mathematik wird das für den Beweis benötigte Auswahlaxiom nicht von allen Mathematikern akzeptiert.

Neben dem bereits dargestellten Paradoxon, also der Verdopplungsversion, gibt es auch noch die Vergrößerungsversion oder auch bekannt unter dem Namen „Erbse und Sonne Paradoxon“. Diese Version behauptet, wie der Name bereits vermuten lässt, dass es möglich ist eine Kugel, von der Größe eine Erbse, so zu zerteilen und anschließend wieder zusammenzusetzen, dass eine Kugel von der unvorstellbaren Größe der Sonne entsteht.

Auch dieses Paradoxon entzieht sich der physischen Realität und ist somit noch ein weiteres Beispiel, dass die Mathematik in der Lage ist mehr auszudrücken, als „wirklich“ Möglich ist.

„Du bist dran, Willi. Stell’ dich nicht so an! Ich kegle auch das erste Mal.“

„Ja, und ich lüge gerade.“

„Was sagst du, Willi?“

„Ich lüge gerade!“

„Was soll das heißen, du lügst gerade ... Moment, wenn du sagst du würdest lügen, dann sagst du doch die Wahrheit, aber wenn du die Wahrheit sagst, dann lügst du doch. Jetzt habe ich Kopfschmerzen!“

Lügen und deren Paradoxa

„Man kann ein Barbier definieren als einen, der alle diejenigen und nur diejenigen, die sich nicht selbst rasieren, rasiert. Die Frage ist: Rasiert der Barbier sich selbst?“
Bertrand Russell: The Philosophy of Logical Atomism, 1918

Das Barbier-Paradoxon ist eine anschauliche Variante der Russellschen Antinomie. Diese Antinomie, welche eine spezielle Art des logischen Widerspruchs darstellt, ist ein Paradoxon der naiven Mengenlehre, das Russell 1903 publizierte und führte zur Grundlagenkrise der Mathematik.

Russell löste das Paradoxon bereits 1903 indem er die Syntax der zulässigen Klassen-Aussagen einschränkte und somit lässt sich dann das obige Paradoxon folgendermaßen lösen:

Es gibt keinen, der genau diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren und somit wird auch die Barbier-Definition ad absurdum geführt.

Es gibt noch weitere Paradoxa die man versucht hat durch Russells Typentheorie zu lösen, zum Beispiel auch das in der Populärkultur oftmals vertretene Lügner-Paradoxon.

Ein Mann sagt: „Ich lüge gerade.“

Die ursprüngliche Fassung des Lügner-Paradoxons stammt von Eubulides (4 Jh. v. Chr.). Varianten dieser Lügner-Antinomie wurden durch die ganze Logikgeschichte hindurch diskutiert. In der modernen mathematischen Logik gewann sie neu an Bedeutung durch Bertrand Russell, der den obigen paradoxen Satz formulierte. Die Paradoxie ergibt sich hier so:

-Angenommen, der Mann lügt. Dies behauptet aber der Mann genau, er sagt also die Wahrheit im Widerspruch zur Aussage.

-Angenommen aber, der Mann sagt die Wahrheit. Dann gilt seine Behauptung und er lügt, was im Widerspruch zu seiner zweiten Annahme steht.

-In der klassischen Logik ist aber jede Aussage entweder wahr oder falsch. In beiden möglichen Fällen ergibt sich jedoch ein Widerspruch, dass heißt der Satz ist paradox.

Russell führt in seiner Lösung eine Hierarchie von Aussagen und eine Hierarchie von Wahrheitsprädikaten ein, womit er selbstbezügliche Aussagen ausschließt. Diese Lösung ist aber umstritten, da das Verbot selbstbezüglicher Sätze den Sprachreichtum gängiger Logiken und der Verbalsprache stark einschränkt.

So gibt es auch Kritik an dem Lügner-Paradoxon, beispielsweise durch Wittgenstein, welcher ein bedeutender Philosoph der Logik war:

„In gewisser Weise ist es sehr merkwürdig, dass sich jemals einer den Kopf darüber zerbrochen hat. Es ist viel ungewöhnlicher, als man vielleicht glaubt, dass sich die Menschen über so etwas bekümmern, denn die Sache funktioniert so: Wenn jemand sagt „Ich lüge“, so erwidern wir, dass er nicht lüge, woraus folgt, dass er wohl lügt, und so fort. Na und? Man kann auf diese Weise fortfahren, bis man schwarz wird. Und warum auch nicht? Es macht doch nichts.“

Dass man nun bei diesem Paradox unendlich lang fortfahren kann, findet es besonderen Anklang bei Science-Fiction-Autoren. Die es als häufiges Motiv zu Übsabelledung einer übermächtigen Künstlichen Intelligenz verwende, die Konfrontation mit dem Paradoxon führt dann zu einer unendlichen Berechnungsschleife.

Was bringt einem nun das Wissen um das Lügner-Paradoxon? Nun so kann man vielleicht erkennen, dass die Mathematik nicht immer in der Lage ist alle Probleme vollständig zu lösen.

Um von den nicht lösbaren Logik-Paradoxa ein wenig Abstand zu nehmen hier noch ein kleines Logikrätsel:

Sie sind in einem Raum mit 2 Türen, vor denen jeweils ein Wächter steht. Die eine Tür führt in den Himmel die andere in die Hölle. Sie dürfen einem der beiden Wächter eine Frage stellen, um in das richtige Tor zu laufen. Der Wächter darf nur mit ja oder nein antworten. Der eine Wächter sagt immer die Wahrheit, der andere lügt immer.

Was würden Sie fragen?

Lösung

Die beiden waren gerade auf dem Rückweg, als sich ihnen ein Seeigel näherte.

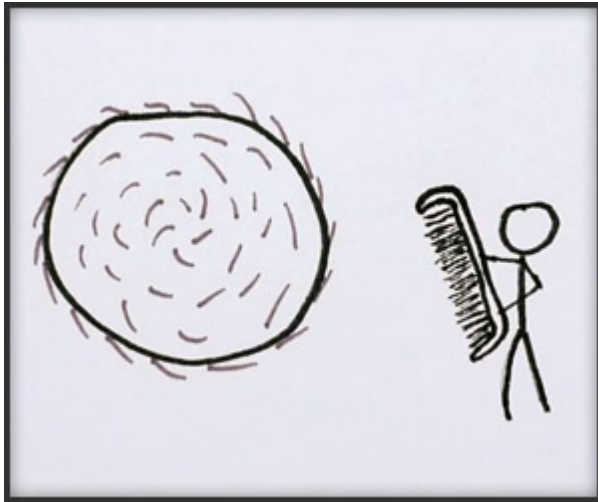
„Schau mal, da vorne ist ein Igel!“

„Aber der ist ja ganz zerzaust, der arme.“

„Hast du einen Kamm dabei? Komm, lass uns dem kleinen Kerl helfen!“

Der Satz vom Igel

Stellen Sie sich vor, Sie hätten einen haarigen Ball und Ihre Aufgabe würde nun darin bestehen die Haare so zu kämmen, dass diese überall flach aufliegen. „Keine anspruchsvolle Aufgabe“ finden Sie? In einer zweidimensionalen Vorstellung ist dieses Problem noch recht ein-

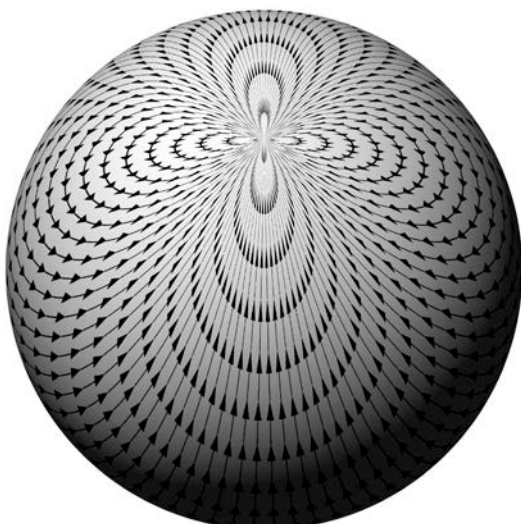


fach zu vollbringen, aber in der dritten Dimension würden Sie vor einem unlösbaren Problem stehen.

„Warum?“, fragen Sie sich. Nun zu aller erst sollten Sie wissen, dass es hier um einen mathematischen Beweis handelt und nicht um eine physikalische Versuchsbeschreibung. Wir sprechen hier über eine Veranschaulichung des Satzes von Poincaré-Hopf, dem „Satz vom Igel“, auch bekannt unter dem Namen „Hairy Ball Theorem“.

Dieser Satz beschäftigt sich mit dem mathematischen Teilgebiet der Differentialtopologie und sagt aus, dass es auf - in unserem Fall – dem haarigen Ball immer mindesten eine Stelle geben muss auf der das Haar absteht oder fehlt. Daraus lässt sich folgender Merkspruch ableiten:

„Jeder stetig gekämmte Ball hat mindestens eine kahle Stelle.“



Nun, was bringt Ihnen dieser Satz noch, außer dem Wissen, nicht in der Lage zu sein, einen Ball kämmen zu können.

Diesen Satz kann man jetzt auf eine ähnliche Gegebenheit in der Realität anwenden wie z.B. den Winden auf der Erde und weiß somit, dass es immer eine Stelle auf der Erdoberfläche gibt,

an der kein Wind weht – dieses Phänomen wird auch „Problem des globalen Windes“ genannt.

Der Merksatz kann auf jedes Objekt angewendet werden, welches ohne große Probleme in eine Kugel deformiert werden kann. Also wenn Ihnen nächstes Mal ein Mathematiker Probleme bereitet, dann fragen Sie ihn doch, ob er eine haarige Banane kämmen kann.

„Schade, dass es nun schon wieder vorbei ist. Es ist immer wieder schön, mit dir in den Urlaub zu fahren, Willi!“

„Ja, Isabelle. Es macht immer sehr viel Spaß. Ich freue mich jetzt schon riesig auf nächstes Jahr.“

„Wie sagte schon Pythagoras: Man sollte schweigen, oder Dinge sagen, die noch besser sind als Schweigen.“

„Das hast du schön gesagt, Isabelle. Aber sag mal: Wer ist denn Pythagoras?“

„Das ist eine lange Geschichte. Die erzähle ich dir nächstes Jahr, Willi.“

Und nach einer langen, innigen Umarmung verabschiedeten sich die beiden voneinander.

Der Satz des Pythagoras – oder auch:

$$a^2+b^2=c^2$$

Über die Entstehung des Satzes von Pythagoras gibt es keine definitiven Erkenntnisse. So ist man sich dennoch ziemlich sicher, dass Pythagoras nicht der erste war, der diesen Zusammenhang herausfand.

Der Lehrsatz wurde schon in anderen Hochkulturen benutzt, so sollen zum Beispiel die Ägypter oder auch die Babylonier den Zusammenhang entdeckten haben und letztere haben diesen auf einer Tontafel etwa 1800 vor Christus festgehalten.

Zu dem Thema "Satz des Pythagoras" gibt es viele Entdeckungen aus alten Kulturen, auch die indische Kultur benutzt diesen Lehrsatz seit langer Zeit. In Griechenland fand man eine beschriftete sowie bemalte Tafel, die ebenfalls eine Konstruktion ähnlich jener der Ägypter zeigte, nur mit einer anderen Beweisführung. Man kennt die Herkunft des Zusammenhangs nicht genau, und dennoch hat Euklid die Entdeckung Pythagoras zugeschrieben.

Es gibt über 400 existierenden verschiedenen Beweistechniken für dieses Satz und eine werde ich jetzt näher erläutern:

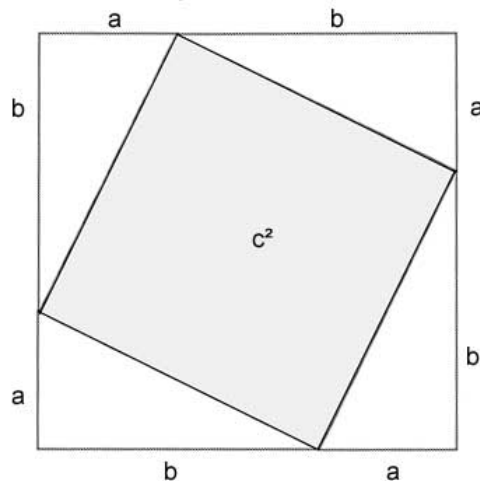
- Wir konstruieren ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b
- Unter der Hypotenuse konstruieren wir die Fläche c^2
- Um c^2 herum konstruieren wir weitere drei zum ersten Dreieck kongruente Dreiecke

-Wir haben nun eine Fläche, die wir zweierlei bezeichnen können:

$$A = (a + b)^2$$

$$A = c^2 + 4 * \frac{1}{2} * a * b$$

Der erste Ausdruck gilt, da die Summe der Längen zum Quadrat die Fläche des Quadrates bezeichnet.



Wir können aber ebenfalls die einzelnen Flächen addieren, also die Fläche des Quadrates und die Flächen der vier Dreiecke, für das für ein Dreieck gilt:

$$A = \frac{1}{2} * \text{Grundseite } (b) * \text{Höhe } (a)$$

Wir dürfen also die beiden Ausdrücke gleichsetzen und vereinfachen:

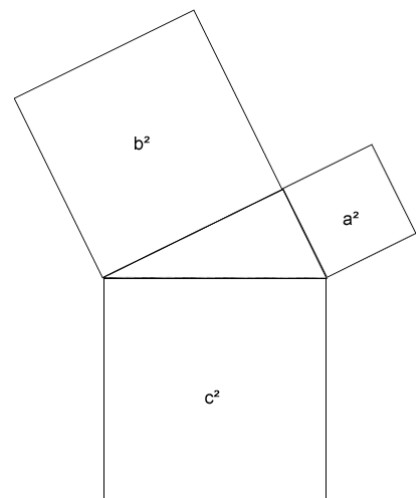
$$(a + b)^2 = c^2 + 4 * \frac{1}{2} * a * b$$

nach der Binomischen-Formel:

$$a^2 + 2 * a * b + b^2 = c^2 + 2 * a * b$$

Auf beiden Seiten $2 * a * b$ subtrahieren:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Daraus ergibt sich, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat der Hypotenuse c gleich der Summe der Kathetenquadrate der Katheten a und b ist.

Diese Beweisführung gehört wohl mit zu den Simpleren und es gibt noch viele weitere, eine hat sogar James A. Garfield, der 20. Präsident der Vereinigten Staaten, aufgestellt.

Lösung Wächterrätsel:

"Wächter, was würde der andere Wächter sagen, wenn ich ihn fragen würde, ob sich hinter diesem Tor hier der Weg in den Himmel befindet?"

1. Fall: Er sagt: "Ja".

- Er lügt, dann würde der andere die Wahrheit sagen und die Frage verneinen.
 - Er sagt die Wahrheit, dann würde der andere lügen und die Frage bejahen.
- In beiden Fällen würde diese Tür in die Hölle führen.

2. Fall: Er sagt: "Nein".

- Er lügt, dann würde der andere die Wahrheit sagen und die Frage bejahen.
 - Er sagt die Wahrheit, dann würde der andere lügen und die Frage verneinen.
- In beiden Fällen würde die Tür in den Himmel führen.

[Zurück](#)